

**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**  
**INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**

**MESTRADO EM: ECONOMIA MONETÁRIA E FINANCEIRA**

**A EXTRACÇÃO E A IMPORTÂNCIA DA INFORMAÇÃO CONTIDA  
NOS PREÇOS DOS DERIVADOS FINANCEIROS.  
EXPECTATIVAS DE MERCADO E PRÉMIOS DE OPÇÕES: UMA  
APLICAÇÃO A OPÇÕES SOBRE FUTUROS DE TAXA DE JURO**

**LUÍS MIGUEL GODINHO DE OLIVEIRA**

Orientação: Prof. Doutor José António de Azevedo Pereira

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Carlos Manuel Pereira da Silva

Vogais: Prof. Doutor Jacinto António Setúbal Vidigal da Silva  
Prof. Doutor José António de Azevedo Pereira

Maio/2002

*Aos meus pais e irmã,  
que estiveram sempre do meu lado,  
me apoiando e incentivando,  
nos bons e maus momentos.*

# **THE EXTRACTION AND RELEVANCE OF INFORMATION ENCLOSED IN DERIVATIVES FINANCIAL ASSET PRICES. MARKET EXPECTATIONS AND OPTION PRICES: AN APLICATION TO INTEREST RATE FUTURE OPTIONS**

**Luís Miguel Godinho de Oliveira**

*Masters:* Monetary and Financial Economics

*Supervisor:* Prof. doutor José António de Azevedo Pereira

## **ABSTRACT**

It's usually accepted that financial asset prices reflect market participants' expectations concerning the evolution of certain important economic and financial variables. In comparison with the majority of the other financial assets, in particular against the futures or forwards, option prices have an additional interest resulting from their ability to provide information, not only in terms of the expected future value of an asset, but also about the higher moments of the probability distribution perceived by economic agents. Regarding the relationship among option prices and their strike prices it's possible to estimate the risk-neutral probability density function (RNPDF), which allow us to characterise almost completely, market expectations regarding the price of the underlying asset at the maturity date of the option.

In the Black-Sholes framework, RNPDF estimation would be a trivial issue only consisting in implied volatility estimation. However, the systematic differences observed between theoretical model prices and those observed in the market, raise some suspicions about the reality adjustment of some of its premises, namely the lognormality for the underlying price distribution and the constant volatility assumed across the time and different strike prices.

In this work, a set of alternative approaches for the RNPDF estimation is presented, along with its advantages and drawbacks, as a way to characterise the current state of the art. Using EURIBOR 3-month interest rate future option prices, and considering a mixture of lognormal distributions, we estimate RNPDF for some days around ECB Council meetings, in order to analyse market views about possible changes in ECB reference interest rates in these meetings. We also study the impact in market expectations, regarding the evolution of shorter-term interest rates, from the events that occurred in the USA on the 11<sup>th</sup> of September 2001, and the "time-to-maturity" effect on RNPDF volatility.

**Keywords:** probability density function, Black-Sholes valuation model, risk-neutral valuation, implied volatility, shorter-term interest rate future options, interest rate expectations.

# **A EXTRACÇÃO E A IMPORTÂNCIA DA INFORMAÇÃO CONTIDA NOS PREÇOS DOS DERIVADOS FINANCEIROS. EXPECTATIVAS DE MERCADO E PRÉMIOS DE OPÇÕES: UMA APLICAÇÃO A OPÇÕES SOBRE FUTUROS DE TAXA DE JURO**

**Luís Miguel Godinho de Oliveira**

*Mestrado em:* Economia Monetária e Financeira

*Orientador:* Prof. Doutor José António de Azevedo Pereira

*Provas concluídas em:* 3 de Maio de 2002

## **RESUMO**

É geralmente aceite que os preços dos activos financeiros reflectem as expectativas dos participantes nos mercados. Face à maioria dos activos financeiros, em particular aos futuros ou “*forwards*”, os preços das opções possuem um interesse adicional oriundo da capacidade que têm de fornecer informação relativa, não só, ao valor médio esperado pelo mercado para o preço futuro do activo subjacente, mas também, sobre os momentos de ordem mais elevada da distribuição de probabilidade percebida pelos agentes económicos. Com base na relação entre os preços das opções e respectivos preços de exercício é possível estimar a função de densidade de probabilidade neutra ao risco (FDPNR) que permite caracterizar, de uma forma quase completa, o perfil de expectativas dos agentes relativamente ao preço do activo subjacente na maturidade opção.

No universo do modelo Black-Sholes, a estimação da FDPNR seria um assunto trivial consistindo apenas na estimação da volatilidade implícita. Porém, as diferenças sistemáticas observadas, entre os preços gerados pelo modelo e os observados no mercado, levantam a suspeita que algumas das suas hipóteses são pouco realísticas, nomeadamente a lognormalidade para a distribuição do preço do activo subjacente e a volatilidade constante assumida para os diferentes preços de exercício e ao longo do tempo.

Neste trabalho é apresentado um conjunto de abordagens alternativas para a estimação de FDPNR, suas vantagens e desvantagens relativas, procurando-se caracterizar o actual estado da arte. Recorrendo aos preços de opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a três meses e com base numa mistura de distribuições lognormais, estimamos as FDPNR para algumas datas em torno das reuniões do Conselho do BCE, utilizando-as na análise das expectativas do mercado relativamente a possíveis alterações das taxas de juro directoras nessas reuniões. Analisamos ainda o impacto nas expectativas dos agentes, relativamente à evolução das taxas de juro, dos acontecimentos ocorridos nos EUA, em 11 de Setembro de 2001 e o efeito “*time-to-maturity*” na volatilidade das FDPNR.

Palavras chave: função de densidade de probabilidade, modelo de valorização de Black-Sholes, valorização neutra ao risco, volatilidade implícita, opções sobre futuros de taxa de juro de curto prazo, expectativas de taxas de juro.

## Índice

Introdução .....	9
1. A extracção de informação dos preços dos activos financeiros .....	12
1.1 A importância da informação extraída dos preços dos activos financeiros .....	12
1.2 Limitações à interpretação da informação extraída dos preços dos activos financeiros .....	18
2. Opções: Descrição do instrumento e sua valorização .....	20
2.1 Descrição do instrumento e alguma nomenclatura.....	20
2.2 Fundamentos teóricos para a valorização de opções.....	21
2.2.1 O valor de uma opção na data da maturidade.....	21
2.2.2 A determinação do preço de uma opção numa data anterior à data do vencimento do contrato: o modelo de valorização de Black-Sholes.....	23
2.2.3 A “Risk-Neutral Valuation” e a fórmula de Black-Sholes .....	29
2.2.4 As limitações do modelo Black-Sholes, a volatilidade implícita e o “Risk Reversal” .....	34
3. Técnicas de estimação de funções de densidade de probabilidade para os preços de activos com base nos prémios de opções sobre os mesmos .....	43
3.1 A relação entre os preços das opções e as funções de densidade de probabilidade .....	45
3.1.1 A abordagem de Breeden e Litzenberger (1978) .....	45
3.2 As diferentes metodologias existentes .....	49
3.2.1 A estimação da FDPNR a partir das volatilidades implícitas: a abordagem de Shimko (1993) .....	52
3.2.2 A abordagem com base nas árvores binomiais: Rubinstein (1994)..	54
3.2.3 A imposição de uma estrutura <i>à priori</i> para a FDPNR terminal: uma mistura de distribuições lognormais, Melick e Thomas (1997) .....	57
3.2.3.1 Utilização de opções do tipo Europeu .....	59
3.2.3.2 Utilização de opções do tipo Americano.....	61
3.2.4 A assunção de um determinado processo estocástico para a evolução do preço do activo subjacente: a abordagem de Malz (1995) .....	64

3.2.5 A estimação da FDPNR sem restrições: a abordagem não paramétrica e a metodologia de Aït-Sahalia e Lo (1998) .....	71
3.3. Análise comparativa das diferentes metodologias apresentadas e algumas limitações gerais .....	75
4. Aplicação prática e interpretação da informação extraída da estimação de funções de densidade de probabilidade neutras ao risco para as taxas de juro de curto prazo da área do Euro .....	80
4.1 Opções sobre futuros de taxa de juro.....	81
4.2 Informação utilizada na estimação das FDPNR .....	83
4.3 Medidas de carácter estatístico utilizadas na interpretação das FDPNR estimadas .....	84
4.4 A estimação de FDPNR implícitas nos preços das opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses .....	86
4.4.1 Histogramas de probabilidade.....	86
4.4.2 A estimação da FDPNR recorrendo a uma mistura de distribuições lognormais .....	88
4.5 Análise das expectativas contidas nas FDPNR estimadas para taxa de juro EURIBOR a 3 meses em algumas datas anteriores e posteriores às reuniões quinzenais do Conselho do BCE.....	97
4.5.1 Expectativas em torno da reunião de 8 Junho de 2000.....	98
4.5.2 Expectativas em torno da reunião de 10 Maio de 2001 .....	101
4.5.3 Expectativas em torno da reunião de 30 Agosto de 2001.....	104
4.6 Análise da alteração das expectativas do mercado em resultado dos acontecimentos verificados nos Estados Unidos em 11 de Setembro de 2001 e do corte surpresa efectuado pelo BCE em 17 de Setembro de 2001 .....	107
4.7 Análise da relação entre a dispersão das FDPNR e o horizonte temporal compreendido entre o momento da estimação e o momento para o qual se refere a distribuição.....	110
Conclusão .....	114
Bibliografia .....	116
Anexo – Informação Utilizada.....	122

## Lista de Quadros e Figuras

### Quadros

**Quadro 3.1:** “*Payoff*” de uma estratégia de “*butterfly spread*” centrada em  $S_T = X^*$ , com um intervalo de variação para os preços possíveis igual a  $\Delta S$

**Quadro 4.1-** Posição no contrato de Futuros depois do exercício da opção

**Quadro 4.2-** Especificação do contrato de futuros EURIBOR a 3 meses

**Quadro 4.3-** Especificação do contrato de opções sobre futuros EURIBOR a 3 meses

**Quadro 4.4:** Parâmetros estimados e somatório dos quadrados dos resíduos

**Quadro 4.5:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas com uma distribuição lognormal e com uma mistura de duas e três distribuições lognormais

**Quadro 4.6:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 2 e 9 Junho de 2000

**Quadro 4.7:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 4 e 15 de Maio de 2001

**Quadro 4.8:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 24 e 31 de Agosto de 2001

**Quadro 4.9:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 10, 12, 17, 18 e 21 de Setembro de 2001

**Quadro 4.10:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 30 de Agosto para Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro de 2001

### Figuras

**Figura 2.1:** “*Payoffs*” na maturidade de opções Europeias consoante a posição do agente no contrato

**Figura 2.2:** Função de densidade de probabilidade neutra ao risco e a verdadeira função de densidade de probabilidade

**Figura 2.3:** Diferenças na distribuição da massa de probabilidade entre as duas funções de densidade de probabilidade

**Figura 2.4:** Curva “*smile*” com base nos preços de opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000 em 28 de Abril de 2000

**Figura 2.5:** Curvas “*smile*” estimadas com base nos preços de opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses em 28 de Abril de 2000 para diferentes maturidades

**Figura 2.6:** Evolução do preço do “*risk reversal*” medido em unidades de volatilidade, para opções com delta próximo de 0.20 em valor absoluto sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses com vencimento em Setembro de 2001

**Figura 4.1:** Histograma das probabilidades risco-neutrais para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses baseado no contrato de opções com vencimento em Setembro de 2000

**Figura 4.2:** Histograma das probabilidades risco-neutrais para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses baseado no contrato de opções com vencimento em Setembro de 2001

**Figura 4.3:** Histograma das probabilidades risco-neutrais para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses baseado no contrato de opções com vencimento em Setembro de 2001

**Figura 4.4:** Funções de densidade de probabilidade neutras ao risco, em 2 Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000

**Figura 4.5:** Funções de distribuição de probabilidade cumulativa neutras ao risco, em 2 Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000

**Figura 4.6:** Preços estimados e preços “*settlement*”, em 2 Junho de 2000, das opções de compra sobre futuros da taxa EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000

**Figura 4.7:** Preços estimados e preços “*settlement*”, em 2 Junho de 2000, das opções de venda sobre futuros da taxa EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000

**Figura 4.8:** Erros de valorização nos preços estimados das opções de compra sobre futuros da taxa EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000, em 2 Junho de 2000

**Figura 4.9:** Erros de valorização nos preços estimados das opções de venda sobre futuros da taxa EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000, em 2 Junho de 2000

**Figura 4.10:** Função de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 2 de Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000

**Figura 4.11:** Curva de rendimentos das taxas de juro EURIBOR em 2 e 9 de Junho de 2000

**Figura 4.12:** Funções de densidade de probabilidade neutras ao risco, em 2 e 9 de Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000



**Figura 4.13:** Funções de distribuição de probabilidade cumulativa neutras ao risco, em 2 e 9 de Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000

**Figura 4.14:** Função de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 4 de Maio de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2001

**Figura 4.15:** Funções de densidade de probabilidade neutras ao risco, em 4 e 15 de Maio de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2001

**Figura 4.16:** Funções de distribuição de probabilidade cumulativa neutras ao risco, em 4 e 15 de Maio de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2001

**Figura 4.17:** Curva de rendimentos das taxas de juro EURIBOR em 4 e 15 de Maio de 2001

**Figura 4.18:** Função de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 24 de Agosto de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Dezembro de 2001

**Figura 4.19:** Funções de densidade de probabilidade neutras ao risco, em 24 e 31 de Agosto de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Dezembro de 2001

**Figura 4.20:** Funções de distribuição de probabilidade cumulativa neutras ao risco, em 24 e 31 de Agosto de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Dezembro de 2001

**Figura 4.21:** Funções de densidade de probabilidade neutras ao risco, em 10, 12, 17, 18 e 21 de Setembro de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Dezembro de 2001

**Figura 4.22:** Curva de rendimentos das taxas de juro EURIBOR em 10 e 21 de Setembro de 2001

**Figura 4.23:** Funções de densidade de probabilidade neutras ao risco, em 30 de Agosto de 2001, para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro de 2001

**Figura 4.24:** Curva de rendimentos das taxas de juro EURIBOR em 30 de Agosto de 2001

**Figura 4.25:** Taxa de juro EURIBOR a 3 meses e estatísticas sumárias implícitas nas FDPNR para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro de 2001

## **Agradecimentos**

Este trabalho representa o culminar de um ano de investigação durante o qual foram algumas as pessoas e entidades que contribuíram para a sua realização, sendo este o espaço para o seu merecido reconhecimento.

Sem querer estabelecer uma hierarquia, começo com é óbvio por agradecer a ajuda da minha família e amigos que estiveram a meu lado nos momentos mais difíceis e os comentários sempre úteis do meu orientador o Prof. Doutor José António de Azevedo Pereira.

Agradeço igualmente à *LIFFE Market Services Data*, na pessoa de Kumud Pattel, a disponibilização da base de dados utilizada neste trabalho e à Federal Reserve Bank of New York a disponibilização de alguns dos artigos consultados.

Uma palavra de agradecimento também a todos os elementos do núcleo de Análise de Operações e Gestão da Liquidez do Departamento de Mercados e Gestão de Reservas do Banco de Portugal pelo apoio que me deram.

A todos um muito obrigado!

## Introdução

A informação contida nos preços dos activos financeiros, em especial nos preços dos activos financeiros derivados, constitui uma ampla fonte de dados e indicadores prospectivos, sobre as expectativas de mercado relativamente a um conjunto de variáveis económico-financeiras fundamentais relacionadas com a actividade económica futura, nomeadamente, taxas de juro e inflação. Esta capacidade que os preços dos activos financeiros têm de espelhar as expectativas de mercado decorre de os mesmos serem de natureza intrinsecamente prospectiva.

Por outras palavras, sabe-se que o preço de qualquer activo financeiro é determinado pelo o valor líquido actualizado dos seus “*cash-flows*” esperados futuros, logo as taxas de actualização utilizadas, assim como, os rendimentos futuros esperados incorporam as expectativas dos agentes relativamente ao que eles esperam que vá acontecer no futuro, quer em termos das diferentes variáveis económicas plausíveis de influenciar os rendimentos futuros, quer ao nível do chamado prémio de risco que traduz o grau de incerteza atribuído pelos agentes aos desenvolvimentos futuros.

Face à grande maioria dos activos financeiros existentes, em particular face aos futuros e “*forwards*”, as opções parecem possuir um interesse adicional no que diz respeito à extracção das expectativas de mercado, uma vez que possuem a capacidade de fornecer, não só, informação importante sobre o valor esperado pelo mercado para o preço futuro do activo subjacente, mas também, sobre os momentos de ordem mais elevada da distribuição de probabilidade percebida pelos agentes, possibilitando assim a obtenção de informação relevante no âmbito da incerteza associada às expectativas dos mesmos.

Com base na relação existente entre os preços das opções e os respectivos preços de exercício, cuja descoberta remonta aos trabalhos de Ross (1976) e Breeden e Litzenberger (1978), e sob a hipótese da neutralidade face ao risco, é possível estimar a chamada função de densidade de probabilidade neutra ao risco para o preço do activo subjacente, na data de vencimento do contrato da opção. Esta função permite ilustrar a dispersão/distribuição das probabilidades atribuídas pelos agentes económicos aos diferentes cenários possíveis, implícitos nos diferentes preços de exercício. Neste sentido, a função de densidade de probabilidade neutra ao risco implícita nos preços das

opções permite caracterizar, de uma forma quase completa, o perfil das expectativas dos agentes relativamente à evolução do preço de um determinado activo base.

É essencialmente sobre a extracção das expectativas de mercado inerentes aos preços das opções, com base na estimação de funções de densidade de probabilidade, que o tema desta dissertação irá incidir, procurando analisar as potencialidades e limitações de alguns dos métodos já desenvolvidos. Embora, o número e a variedade de metodologias existentes neste domínio seja elevada, procuraram-se expor as principais abordagens existentes, por forma a dar ao leitor alguma informação sobre o actual estado da arte. Fazendo uso de algumas das técnicas apresentadas procurou-se igualmente analisar a evolução das expectativas do mercado, relativamente às taxas de juro de curto prazo da Zona Euro, em torno de algumas datas específicas.

No que respeita à estrutura da dissertação esta assenta em quatro capítulos. O primeiro começará por chamar a atenção para a importância da extracção das expectativas relativas à evolução da economia e mercados, dos preços dos activos financeiros, ressaltando, porém, o cuidado que é necessário ter na interpretação da informação obtida, dadas as limitações e condicionalismos que estão subjacentes a todas as metodologias empregues. Procurar-se-á, ainda de que de uma forma breve, justificar a vantagem que as opções apresentam, como base de trabalho, para a extracção de informação sobre expectativas face à grande maioria dos outros activos financeiros.

O segundo capítulo visa fornecer um enquadramento teórico de base e um conjunto de conceitos elementares sobre as opções, nomeadamente, no âmbito de questões relacionadas com a sua valorização. Será feita uma breve apresentação do modelo de Black-Scholes e dos resultados mais importantes decorrentes do mesmo. É com base nesses resultados e hipóteses em que o mesmo assenta, que se conclui que a estimação da função de densidade de probabilidade associada ao preço do activo subjacente, na data da maturidade da opção, se torna uma área de enorme relevo merecendo assim alguma dedicação da nossa parte. Esta constatação resulta, como iremos ver, do facto de os preços das opções calculados de acordo com a fórmula de Black-Sholes diferirem sistematicamente dos preços das opções observados no mercado. Este facto poderá estar associado à existência de diferenças entre a distribuição lognormal assumida pelo modelo de Black-Sholes para a distribuição dos preços dos activos base e a verdadeira distribuição assumida pelo mercado.

No terceiro capítulo da dissertação, para além de se demonstrar a relação existente entre os preços das opções e as FDPNR, procurou-se expor alguns dos métodos utilizados para a estimação das mesmas, tentando-se cobrir as diferentes abordagens ao problema e fazendo referências a aplicações práticas levadas a cabo por vários autores neste contexto. Serão também apresentadas, sempre que possível, as vantagens e desvantagens inerentes a cada uma das metodologias e a estudos de autores que tenham procurado avaliar qual a melhor técnica a utilizar.

No quarto capítulo procedeu-se à aplicação de alguns dos métodos apresentados no capítulo anterior e à interpretação dos resultados obtidos. Dada a inexistência no nosso país de um mercado de derivados (opções) suficientemente líquido que permita validar a aplicação de algumas das metodologias expostas, optou-se por fazer uma aplicação a opções transaccionadas no mercado Europeu. Desta forma foram escolhidas as opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR<sup>1</sup> a três meses transaccionadas na LIFFE<sup>2</sup>.

A escolha das opções atrás referidas prende-se com outro dos objectivos do presente trabalho que é o de investigar em que medida o mercado tem capacidade para antecipar alterações nas taxas de juro de curto prazo e qual o impacto dessas eventuais alterações nas expectativas dos agentes económicos.

Essa investigação é efectuada com base na análise e interpretação do formato e alterações observadas nas funções de densidade de probabilidade estimadas, recorrendo a algumas medidas de carácter estatístico, em datas anteriores e posteriores à realização das reuniões do Conselho do Banco Central Europeu (BCE). Foi igualmente estudado o impacto que os atentados terroristas ocorridos, em 11 de Setembro de 2001 nos EUA, tiveram nas expectativas dos agentes, relativamente à evolução das taxas de juro de curto prazo da Zona Euro, e o efeito “*time-to-maturity*” na dispersão das FDPNR estimadas.

No final é apresentado um breve sumário no qual são inventariadas as principais conclusões e resultados obtidos da elaboração da dissertação.

---

<sup>1</sup> EURo InterBank Offered Rate (Taxa Interbancária de Oferta do Euro).

<sup>2</sup> London International Financial Futures and Options Exchange.

## **1. A extracção de informação dos preços dos activos financeiros**

### **1.1 A importância da informação extraída dos preços dos activos financeiros**

Desde sempre que os responsáveis pela condução de políticas económicas por um lado, e os agentes que actuam nos mercados por outro, procuram antecipar a evolução dos mercados financeiros e de um conjunto de variáveis económico-financeiras de relevo a eles associados de forma mais ou menos directa. A justificação para este interesse reside essencialmente na capacidade que os mercados financeiros, em particular os preços dos activos neles transaccionados, têm de reflectir o que se passa na economia real e na mente dos agentes que nela actuam.

Deste modo, a interpretação correcta das indicações dadas pelos mesmos poderá permitir a detecção de futuras situações anormais na economia, possibilitando que estas sejam corrigidas ou atenuadas atempadamente. Por outro lado, e se interpretada correctamente, a informação por eles fornecida permite também, tornar mais efectivo e eficiente o exercício da política económica e a gestão dos riscos de mercado.

Os preços dos activos financeiros, em geral constituem uma ampla fonte de informação para os agentes interessados na evolução dos mercados e economia, na medida em que reflectem as expectativas actuais dos participantes no mercado, relativamente à evolução futura e grau de incerteza de diversas variáveis financeiras e macro-económicas fundamentais. Tal característica decorre, fundamentalmente, das propriedades intrínsecas de carácter prospectivo inerentes a este tipo de activos.

Em geral, sabe-se que o preço actual de um activo financeiro é determinado pelo valor esperado actualizado do seu fluxo de rendimentos futuros. Num mercado líquido e eficiente, o preço de um activo financeiro deve ser assim o reflexo das expectativas dos participantes no mercado no que diz respeito aos fluxos de rendimento esperados futuros, bem como das taxas de actualização exigidas pelos mesmos<sup>3</sup>.

As taxas de actualização, constantes ou variáveis com o tempo, utilizadas pelos agentes na determinação do chamado preço teórico resultam de dois factores. O primeiro está associado à compensação pelo adiamento do consumo presente para um momento futuro, o outro factor está relacionado com a incerteza associada ao fluxo de

---

<sup>3</sup> Ver, por exemplo, Campbell, Lo, e Mackinlay (1997).

rendimentos futuros, normalmente designado por prémio de risco. É neste contexto que surgem as expectativas inerentes aos preços dos activos financeiros, na medida em que os participantes no mercado formulam expectativas quanto aos rendimentos futuros dos activos e incerteza associada aos mesmos no momento da sua valorização.

A extracção e interpretação das expectativas implícitas nos preços vigentes no mercado possui uma importância extrema para as entidades responsáveis pela condução das políticas económicas, nomeadamente ao nível da política monetária<sup>4</sup>. Tal importância deriva em primeiro lugar, do facto de as expectativas associadas aos preços dos activos financeiros constituírem indicadores prospectivos quanto ao nível da incerteza e tendência da evolução futura dos mercados e economia. Por outro lado, dado o facto de serem continuamente actualizados, incorporam a informação mais recente ao dispor dos mercados, possibilitando dessa forma que, em alguns casos, se efectue uma avaliação diária da conjuntura económica, capaz de providenciar informação atempada sobre o comportamento futuro da economia e mercados. Neste sentido, verificamos estar na presença de uma fonte de informação privilegiada, por exemplo, no âmbito da prossecução de políticas económicas em que a componente de “*forward-looking*” tenha um papel importante, como é o caso da política monetária na Zona Euro<sup>5</sup>.

Tradicionalmente, a extracção das expectativas dos activos financeiros incidia na análise das taxas de juro “*forward*” implícitas na curva de rendimentos das taxas de juro, nos “*forward rate agreements*” (FRA’s), nos futuros, ou nos próprios contratos “*forward*”, tendo como principal objectivo a extracção das expectativas relativas à evolução das taxas de juro, câmbio ou inflação, deduzindo-se a partir desta informação o comportamento futuro dos mercados e da economia<sup>6</sup>. Na grande maioria dos casos a extracção das expectativas consistia, de um modo mais ou menos grosseiro, na estimação e obtenção de expectativas pontuais que traduziam de alguma forma as expectativas médias dos agentes de mercado relativamente a uma determinada variável.

---

<sup>4</sup> Sobre este assunto ver, por exemplo, Bahra (1996,1997), Neuhaus (1995), Söderlind e Svensson (1998) e Söderlind (1998).

<sup>5</sup> “A Estratégia da Política Monetária do Eurosistema Orientada para a Estabilidade”, *Boletim Mensal do BCE*, Janeiro de 1999.

<sup>6</sup> Por exemplo, uma maior inclinação da curva de rendimentos é geralmente interpretada como traduzindo expectativas de aceleração da actividade económica, a situação contrária poderá significar um “arrefecimento” da economia.

Com os desenvolvimentos registados nos mercados financeiros a partir dos anos 70, em particular nos de derivados, foram surgindo novos produtos que trouxeram consigo a possibilidade de os agentes explorarem um conjunto de informação cada vez mais rico e alargado. Em resultado desta evolução, também os métodos relativos à extracção de expectativas de mercado implícitas nos preços dos activos financeiros foram evoluindo em diferentes direcções<sup>7</sup>.

Uma análise/interpretação rigorosa sobre as expectativas do mercado requer informação sobre duas dimensões distintas, o sentido e o grau de incerteza subjacente a essas expectativas. Só com o conhecimento da informação relativa a estas duas dimensões é possível avaliar e interpretar com alguma precisão a tendência futura dos mercados financeiros e da economia em geral.

A análise da informação implícita na curva de rendimentos, nos futuros, “*forwards*” ou FRA’s não permite extrair de uma forma clara a informação relativa a essas duas dimensões, nomeadamente, no que diz respeito ao grau de incerteza associado às expectativas. Note-se, por exemplo, que em determinadas situações as expectativas médias observadas no mercado se mantêm inalteradas, enquanto que a probabilidade atribuída a cada valor futuro esperado se pode alterar substancialmente.

É tendo por base a necessidade da informação relativa ao grau de incerteza, que sob determinadas condições, os preços das opções trazem um enorme valor acrescentado para a inferência das expectativas dos participantes nos mercados. Assim, os preços das opções têm um conteúdo informativo mais rico que a maioria dos outros derivados, na medida em que, para além de fornecerem informação respeitante às expectativas médias do mercado relativamente ao preço futuro do activo subjacente, permitem igualmente obter informação ligada à incerteza associada a essas expectativas. Essa informação decorre do facto de os preços das opções fornecerem informação que permite calcular os momentos mais elevados da distribuição<sup>8</sup> de probabilidade, em particular, permitem avaliar a amplitude dessa incerteza e se a mesma é simétrica ou se concentra numa direcção específica<sup>9</sup>. Assim, os preços das opções permitem caracterizar, de uma forma

---

<sup>7</sup> Söderlind e Svensson (1998) apresentam um “*survey*” de métodos recentes sobre a extracção de informação ligada a expectativas a partir dos preços de activos financeiros.

<sup>8</sup> Note-se que em termos matemáticos, o grau de incerteza associado a uma variável aleatória é medido pelos momentos de ordem superior a um, nomeadamente pelo segundo, terceiro e quarto momentos, que traduzem, respectivamente, o grau de dispersão, assimetria e achatamento da distribuição.

<sup>9</sup> Conforme referido por Bahra (1997).



quase completa, o perfil das expectativas dos agentes relativamente a evolução do preço de um determinado activo base. Note-se que esta capacidade que os preços das opções têm, de transmitir informação sobre a incerteza, decorre do facto de os mesmos serem, de algum modo, definidos em função da volatilidade dos preços dos activos financeiros<sup>10</sup>, logo, traduzem a dispersão/distribuição das probabilidades atribuídas pelos agentes aos vários cenários possíveis sobre a trajectória futura dos preços desses activos. Este facto dá origem a que as distribuições de probabilidade implícitas para os vários preços futuros do activo subjacente possam ser multimodais ou assimétricas, donde que nestas circunstâncias, o cálculo de indicadores de incerteza se torna num exercício particularmente revelador do sentimento geral dos mercados.

Desde os finais dos anos 80, os investigadores económico-financeiros têm procurado aperfeiçoar os métodos que visam a extracção das expectativas do mercado, implícitas nos preços das opções, por forma a contemplar todos os aspectos de relevo no âmbito da interpretação das expectativas. Os desenvolvimentos obtidos vão para além da simples análise da volatilidade implícita<sup>11</sup> nos preços das opções, decorrentes da utilização do modelo de valorização de Black-Sholes. Os diferentes autores têm procurado centrar as suas análises em duas outras grandes direcções.

A primeira assenta no estudo do processo estocástico seguido pelo preço activo subjacente<sup>12</sup>, a segunda incide no desenvolvimento de vários processos de estimação da chamada função de densidade de probabilidade neutra ao risco (FDPNR) implícita, para preço do activo subjacente, na data de vencimento da opção<sup>13</sup>. De uma forma simples pode dizer-se que estas funções, calculadas com base nos preços observados das opções relativas ao mesmo activo subjacente, e com datas de vencimento idênticas, mas sobre preços de exercício diferentes, traduzem a distribuição de probabilidade que o mercado atribui ao preço do activo base, na maturidade da opção, se os agentes que actuam no mercado forem neutros face ao risco. Desta forma, estas funções parecem conter informação potencialmente útil para as autoridades monetárias, instituições financeiras e sector privado em geral, na medida em que, através delas podemos obter um conjunto

---

<sup>10</sup> Como iremos ver no capítulo 2.

<sup>11</sup> O conceito de volatilidade implícita será abordado mais à frente neste trabalho.

<sup>12</sup> Ball e Torous (1983, 1985), Bates (1988,1996), Malz (1997b)

<sup>13</sup> Melick e Thomas (1997), Bahra (1996,1997), Shimko (1993), Rubinstein (1994), Aït-Sahalia e Lo (1998), Malz (1995), Leahy e Thomas (1996) entre outros.

de informação mais detalhado sobre as expectativas do mercado, nomeadamente, ao nível da incerteza.

De acordo com Bodarenko (2000) e Jackwerth (1999), a estimação das funções de densidade de probabilidade tem inúmeras aplicações, podendo ser usadas para: cotar activos derivados exóticos ou pouco líquidos; avaliar as expectativas do mercado relativamente a acontecimentos político-económicos importantes; estimar os parâmetros do processo estocástico que governa a evolução do preço do activo subjacente; testar a racionalidade do mercado; estimar ao grau de preferência dos investidores relativamente ao risco. Podem ainda ser utilizadas numa perspectiva de gestão de carteira e de risco, por parte das instituições financeiras e do sector privado em geral.

Nos últimos anos, em consequência do enorme interesse dos investigadores económico-financeiros sobre esta temática, surgiu um elevado número de trabalhos, facto que demonstra bem a atenção crescente dada pela literatura a este assunto. Vários estudos efectuados procuraram demonstrar a utilidade da estimação das FDPNR em diferentes situações, tentando provar que é possível antecipar, a partir da análise da evolução dos preços das opções e expectativas neles contidas, o comportamento futuro dos mercados financeiros e consequentemente da economia em geral.

Nakamura e Shiratsuka (1999), Bahra (1996,1997), Neuhaus (1995), Söderlind (1998), Söderlind e Svensson (1998), McManus (1999), mostraram a utilidade da extracção das expectativas do mercado dos preços de opções, no âmbito da formulação e condução da política monetária. Em particular, Bahra (1997) salientou que os preços das opções podem ser úteis para as autoridades responsáveis pela condução da política monetária, na medida em que possibilitam a extracção de informação respeitante às condições monetárias e credibilidade da política monetária seguida, possibilitando igualmente identificar anomalias nos mercados financeiros, avaliar o “*timing*”, a eficácia e o impacto das medidas de política monetária.

Outros estudos centraram-se na análise das expectativas inerentes aos preços das opções a um nível mais específico pretendendo, nomeadamente, avaliar em que medida a informação contida nas FDPNR permite identificar futuras crises ou “*crashes*” dos mercados. Neste contexto, enquadra-se o trabalho de Gemmill e Saflekos (2000), que recorrendo aos preços de opções de compra e venda sobre o índice FTSE-100, analisou em que medida a informação contida nos preços das opções permitiu ou não antecipar os “*crashes*” bolsistas de 1987 e 1989, a crise do Sistema Monetário Europeu (SME) em

1992 e a crise asiática de 1997. Outro trabalho na linha do anterior foi o desenvolvido por Bates (1991) que centrou o seu estudo apenas no “*crash*” bolsista de 1987.

Melick e Thomas (1997), por sua vez, utilizaram os preços de opções sobre futuros de petróleo para estimarem FDPNR para várias datas durante o período que durou a Guerra do Golfo, no sentido de avaliar o impacto dos desenvolvimentos do conflito nomeadamente, os seus possíveis desfechos no preço do petróleo.

Leahy e Thomas (1996), recorreram à estimação de FDPNR com base em opções sobre futuros do Dólar Canadiano, para investigarem o impacto do referendo de 1995 sobre a soberania do Quebec no mercado cambial Canadiano.

Coutant, Jondeau e Rockinger (2001), estimaram as FDPNR implícitas para a taxa de juro PIBOR<sup>14</sup> em diferentes dias em torno das eleições francesas de 1997, concluindo que a realização de eleições antecipadas foi prevista pelo mercado ainda antes do anúncio oficial.

Malz (1995), Campa e Chang (1996, 1998) e Campa, Chang e Refalo (1999), utilizaram os preços de opções sobre algumas taxas de câmbio do SME e sobre a taxa de câmbio do Real Brasileiro face ao Dólar Americano, respectivamente, para avaliar a credibilidade dos acordos estabelecidos o âmbito das “*exchange rate target zones*” e estimar as eventuais probabilidades de realinhamento de algumas moedas. Recorrendo à estimação de FDPNR, ambos os estudos avaliaram a probabilidade mínima e a máxima associada à saída de uma taxa de câmbio da banda estabelecida. Permitiram igualmente concluir que, muitas das vezes os mercados de opções, através das probabilidades atribuídas pelos seus participantes aos diferentes cenários futuros, permitem antecipar crises ou realinhamentos nos mercados cambiais.

Ainda, na linha dos trabalhos anteriores, Mizrach (1996) com base na estimação de FDPNR encontrou evidência nos preços das opções, de que o mercado tinha incorporado a potencial saída da Libra do SME com alguma antecedência face à data do anúncio oficial.

---

<sup>14</sup> Paris InterBank Offered Rate (Taxa Interbancária de Oferta de Paris).

## **1.2 Limitações à interpretação da informação extraída dos preços dos activos financeiros**

Pelo o que foi exposto até aqui, parece que a utilização dos preços dos activos financeiros, em particular os preços das opções, apresenta um enorme potencial no âmbito da extracção de informação sobre as expectativas do mercado. Porém, conforme nos é mencionado por vários autores<sup>15</sup>, existe o perigo de ser “ler” demasiada informação nos preços dos activos financeiros. Esse perigo resulta do facto de os modelos utilizados na extracção das expectativas não passarem de meras construções teóricas que se tentam aproximar o mais possível dos verdadeiros modelos subjectivos utilizados pelo mercado. Como meras construções que são, estes modelos estão dependentes de um número elevado de factores endógenos ou exógenos que poderão condicionar as análises a efectuar, em particular da quantidade e qualidade de informação disponível, pois por mais sofisticado e eficiente que seja uma determinada metodologia, a fiabilidade desta estará sempre condicionada por estes dois aspectos.

Factores como grau de liquidez ou o nível de perfeição dos mercados, onde os preços utilizados para a extracção da informação são obtidos, condicionam de uma forma decisiva as possíveis conclusões a tirar. Quanto mais incipientes estes dois aspectos menor será o grau de fiabilidade dos resultados obtidos e das análises efectuadas.

O facto dos preços dos activos poderem ser temporariamente afectados por factores que nada têm a ver com os fundamentos da economia, nomeadamente, aspectos institucionais e técnicos do mercado, ou desequilíbrios entre diferentes tipos de agentes que nele actuam, condiciona igualmente as interpretações que se podem fazer dos comportamentos observados.

A grande variedade de modelos e metodologias existentes, as hipóteses subjacentes à sua modelização, nomeadamente ao nível das ligações entre as variáveis financeiras e o comportamento futuro dos mercados, e a utilização pelos participantes no mercado de metodologias de valorização dos activos diferentes das utilizadas pelos observadores, são outros dos factores passíveis de influenciar os resultados obtidos, cujas consequências são tanto mais graves, quanto menor for o consenso entre os diferentes agentes relativamente às hipóteses e modelos a utilizar.

---

<sup>15</sup> Ver, por exemplo, Bahra (1997) e Jackwerth (1999).

Em síntese, embora seja geralmente aceite que os preços dos activos financeiros reflectem as expectativas dos agentes participantes nos mercados, a utilização da informação extraída com base nas diferentes metodologias existentes não deve substituir de modo algum as avaliações e previsões efectuadas por entidades competentes, como é o caso dos bancos centrais e institutos especializados, mas sim servir como informação complementar a estas.

## **2. Opções: Descrição do instrumento e sua valorização**

Este segundo capítulo tem como principal objectivo familiarizar o leitor com alguns dos aspectos essenciais ligados à temática das opções, nomeadamente no âmbito da sua valorização. Assim, depois de uma breve primeira secção em que se procederá à descrição do instrumento financeiro em causa e à apresentação da nomenclatura utilizada, seguir-se-á uma segunda secção que centrará o seu conteúdo na problemática da valorização das opções. Nesta secção, será feita uma exposição dos resultados mais importantes do modelo de valorização de Black-Sholes, bem como das suas principais limitações. Estas levam a que a estimação das funções de densidade de probabilidade não seja um assunto tão trivial como se poderia pensar à partida. Conceitos como os de volatilidade implícita, curva “*smile*”, estrutura temporal de volatilidade e “*risk reversal*” serão igualmente alvo de uma abordagem ao longo deste capítulo.

### **2.1 Descrição do instrumento e alguma nomenclatura**

Uma opção sobre um determinado activo, é um contrato que dá ao seu detentor um direito, mas não uma obrigação, de comprar ou vender esse activo, designado por activo subjacente ou activo base, numa determinada data futura, a um preço pré-determinado, o chamado preço de exercício.

As opções que dão ao seu detentor o direito de comprar um determinado activo subjacente são conhecidas como opções de compra ou “*calls*”, por outro lado as opções que dão ao seu detentor o direito de vender o activo subjacente são designadas por opções de venda ou “*puts*”. A data em que uma opção expira é vulgarmente designada como data da maturidade, data de exercício ou data terminal.

As opções que só podem ser exercidas na sua maturidade (vencimento) são conhecidas por opções Europeias, enquanto que aquelas que podem ser exercidas em qualquer momento até à data do vencimento são designadas por opções Americanas.

As opções são por vezes caracterizadas tendo em conta o seu preço de exercício e o preço actual do activo subjacente, como estando “*in-the-money*”, “*at-the-money*” ou “*out-of-the-money*”. Diz-se que uma opção se encontra “*at-the-money*” se o preço actual do activo subjacente é igual ao preço de exercício da opção. Numa situação em que o preço de exercício de uma opção de compra (venda) é mais (menos) elevado que o

preço actual do activo subjacente, a opção diz-se que está “*out-of-the-money*”, na situação contrária diz-se que está “*in-the-money*”.

Pelo facto de o rendimento subjacente a uma opção estar dependente da evolução do preço do chamado activo base (acções, obrigações, mercadorias, índices bolsistas, contratos de futuros, taxas de câmbio) as opções são consideradas activos derivados.

## 2.2 Fundamentos teóricos para a valorização de opções

### 2.2.1 O valor de uma opção na data da maturidade

Na data da maturidade de uma opção, o detentor da mesma tem a possibilidade de accionar o direito que lhe é conferido pelo contrato estabelecido, só o exercendo, porém, numa situação em que tal lhe confira um rendimento positivo.

No caso de estarmos na presença de uma opção de compra, o agente que detém a posição longa na opção só a vai exercer se o preço do activo subjacente for superior ao preço de exercício da opção. Nesta situação, o agente tem a possibilidade de realizar um lucro imediato, na medida em adquire a um preço inferior ao preço actual de mercado um activo que poderá vender de seguida a um preço superior.

No caso de uma opção de venda, o detentor da opção só vai exercer o seu direito de vender um determinado activo ao preço de exercício se este for superior ao preço em vigor no mercado. Nesta situação o agente tem a possibilidade de comprar o activo subjacente no mercado a um preço inferior ao que o vendedor da opção de venda terá que lhe pagar. Assim o agente realiza uma mais valia imediata que se traduz na diferença entre o preço de exercício e o preço actual do activo subjacente no mercado.

O valor de opção de compra na maturidade pode ser então dado pela expressão:

$$C(S_t, \tau, X) = C(S_T, 0, X) = \max[S_T - X; 0] \quad [2.1]$$

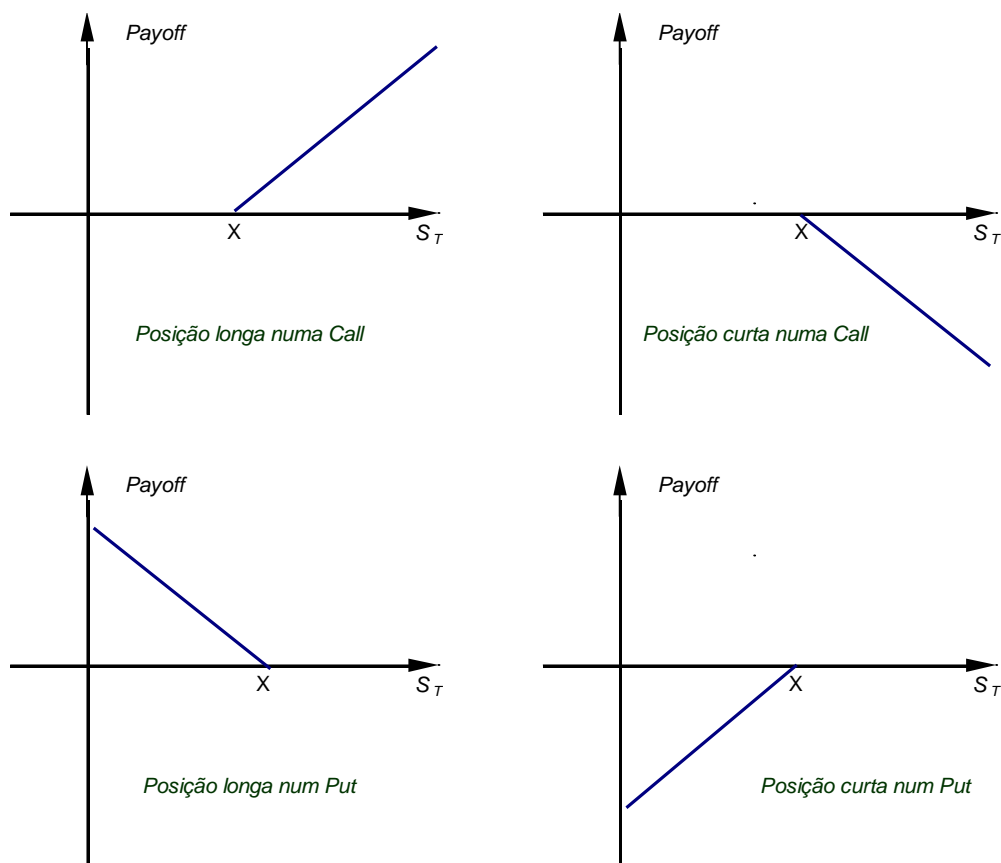
Relativamente ao valor de uma opção de venda temos,

$$P(S_t, \tau, X) = P(S_T, 0, X) = \max[X - S_T; 0] \quad [2.2]$$

onde,  $S_t$  é o preço do activo base no momento presente  $t$ ,  $S_T$  representa o preço do activo base na data de vencimento da opção,  $X$  representa o preço de exercício da opção e  $\tau$  o intervalo de tempo até à maturidade, em anos, dado por  $\tau = T - t$ . Na figura 2.1

podemos ver a estruturas de “*payoff*” possíveis, na data da maturidade, de uma opção de compra ou venda consoante a posição do agente no contrato. Note-se que, os perfis de “*payoff*” apresentados ilustram apenas o rendimento das opções na maturidade, não tendo em conta o prémio pago ou recebido pelos agentes pela tomada de posição no contrato.

**Figura 2.1:** “*Payoffs*” na maturidade de opções Europeias consoante a posição do agente no contrato



Uma vez determinado o valor de uma opção na maturidade, o nosso interesse desloca-se agora para a determinação do seu valor numa data anterior à do seu vencimento. Os desenvolvimentos teóricos nesse campo decorrem fundamentalmente, como iremos mostrar, do “*payoff*” gerado pela opção para o seu detentor na data da maturidade.



### 2.2.2 A determinação do preço de uma opção numa data anterior à data do vencimento do contrato: o modelo de valorização de Black-Sholes

O preço de qualquer activo financeiro, no momento  $t$ ,  $A_t$ , que proporcione ao seu detentor um rendimento num momento  $T$  futuro, pode ser determinado tendo em conta o valor esperado desse rendimento actualizado pelo factor de actualização estocástico entre os momentos  $t$  e  $T$ ,  $D_{(t,T)}$ <sup>16</sup>:

$$A_t = E_t[A_T \times D_{(t,T)}] \quad [2.3]$$

onde,  $E_t$  representa o valor esperado condicional à informação disponível no momento  $t$ .

No caso de estarmos na presença de uma opção de compra Europeia, na ausência de possibilidades de arbitragem, o seu preço (ou prémio) de mercado no momento  $t$   $C(t, \tau, T; X)$ , deverá ser igual ao valor esperado do seu “payoff” na maturidade, actualizado para o momento presente:

$$C(t, \tau, T; X)_t = E_t^P[\max(S_T - X; 0) \times D_{(t,T)}] \quad [2.4]$$

onde,  $S_T$  é o preço do activo subjacente na data de vencimento da opção,  $E_t$  representa o valor esperado condicional à informação disponível no momento  $t$ , o índice  $P$  significa que o valor esperado é calculado sobre a verdadeira medida de probabilidade  $P$  traduzida pela função de densidade de probabilidade  $p$  e  $D_{(t,T)}$  continua a representar o factor estocástico de actualização entre os momentos  $t$  e  $T$ .

Para o preço de uma opção de venda teremos uma relação similar:

$$P(t, \tau, T; X)_t = E_t^P[\max(X - S_T; 0) \times D_{(t,T)}] \quad [2.5]$$

As duas equações atrás expostas constituem as relações teóricas básicas para a valorização de uma opção numa data anterior à do seu vencimento, na ausência de oportunidades de arbitragem. Designando por  $q_t(S_T)$  e  $\tilde{E}_t$ , respectivamente, a distribuição de probabilidade neutra ao risco de  $S_T$ , condicional à informação disponível no momento  $t$ , e o valor esperado calculado com base nesta distribuição, podemos exprimir o prémio de uma opção de compra de uma forma equivalente a [2.4],

---

<sup>16</sup> Ver, por exemplo, Jarrow (1996).

$$C(t, \tau, T; X)_t = e^{-\pi(t, \tau)} \tilde{E}_t \max[S_T - X; 0] = e^{-\pi(t, \tau)} \int_X^{+\infty} (S_T - X) q_t(S_T) dS_T \quad [2.6]$$

No caso de uma opção de venda teremos:

$$P(t, \tau, T; X)_t = e^{-\pi(t, \tau)} \tilde{E}_t \max[X - S_T; 0] = e^{-\pi(t, \tau)} \int_0^X (X - S_T) q_t(S_T) dS_T \quad [2.7]$$

Como já foi referido anteriormente, para além de opções de compra e venda do tipo Europeu, existem também no mercado opções de compra e venda do tipo Americano. As últimas, ao permitirem o exercício antecipado do direito inerente, nunca poderão ter um valor inferior ao de uma opção do tipo Europeu com características idênticas. No caso de estarmos na presença de opções do tipo Americano, nas expressões [2.6] e [2.7] o sinal de igualdade deverá ser substituído por um sinal de “maior ou igual”<sup>17</sup>.

Até aqui apresentou-se de uma forma sintética a relação teórica que o preço de uma opção deve satisfazer, em cada momento, podendo essa relação ser utilizada para a sua valorização.

Durante vários anos os investigadores financeiros procuraram encontrar um método que permitisse, de uma forma simples, determinar o prémio “justo” de uma opção. Esse método foi encontrado por Black e Sholes (1973) ao derivarem uma equação diferencial que deverá ser satisfeita pelo preço de uma opção em cada momento. A equação obtida permite determinar facilmente o preço “justo” de uma opção numa data anterior à data do seu vencimento.

De acordo com a fórmula desenvolvida pelos autores, a determinação do preço actual de uma opção do tipo Europeu, não dependente do pagamento de dividendos associados ao activo subjacente, depende essencialmente de 5 parâmetros<sup>18</sup>:

- o preço actual do activo subjacente;
- o preço de exercício da opção;
- o período de tempo até ao vencimento da opção;

---

<sup>17</sup> Para uma explicação mais detalhada dos resultados atrás apresentados ver, por exemplo, Söderlind e Svensson (1998) e Hull (1998).

<sup>18</sup> O impacto que cada um dos parâmetros tem no preço de uma opção pode ser observado, por exemplo, em Hull (1998), página 195.

- a taxa de juro (anualizada) sem risco durante o período de vida remanescente da opção;
- a volatilidade (anualizada) do preço do activo subjacente durante o período vida remanescente da opção.

Para o cálculo do preço da opção, é necessário, porém, efectuar uma hipótese sobre o modo como evolui o preço do activo subjacente durante o período de vida da opção. Muitos dos modelos de valorização de activos financeiros derivados assentam na hipótese de que o preço do activo subjacente segue um processo estocástico integrado ou de reversão à média.

No caso particular do modelo clássico de Black-Sholes (1973), é assumido que o preço do activo subjacente segue um processo estocástico conhecido como Movimento Geométrico Browniano. Este processo admite que para o activo subjacente é esperada uma taxa de rendibilidade constante. Contudo, a evolução do preço do mesmo é independente, possuindo uma distribuição normal ao longo do período de vida da opção. Sob estas hipóteses, as probabilidades neutras ao risco associadas aos possíveis rendimentos futuros do activo subjacente, na data de maturidade da opção, assumem a forma de uma distribuição de probabilidade normal e as relativas ao preço do activo base, uma distribuição de probabilidade lognormal.

A ideia básica do modelo consiste na construção de uma carteira constituída por opções e activo subjacente, que pode ser ajustada ao longo do tempo<sup>19</sup>, de tal forma que a sua rendibilidade é certa e conhecida. Isto é, consiste na construção de uma carteira sem risco cuja rendibilidade final seja igual à taxa de juro dos activos sem risco, sendo o preço da opção determinado posteriormente, através da utilização do princípio da ausência de arbitragem no mercado. Esta ideia decorre do facto de que os processos estocásticos que governam a evolução do preço do activo subjacente e do preço da opção não serem independentes, estando sim correlacionados uma vez que ambos dependem da incerteza subjacente à evolução do preço do activo base, Hull (1998). Neste sentido, é possível determinar uma combinação linear da opção e do activo subjacente que elimina a variação aleatória no valor total da carteira por forma a que a rendibilidade da mesma seja igual à taxa de juro sem risco.

---

<sup>19</sup> Sobre o ajustamento ou reajustamento de carteiras com opções e cobertura de posições, consultar, por exemplo, Elton e Gruber (1995), capítulo 14.

As hipóteses subjacentes a derivação da fórmula de valorização de Black-Sholes são as seguintes<sup>20</sup>:

- a evolução do preço do activo subjacente segue um processo estocástico conhecido como Movimento Geométrico Browniano, o que corresponde a assumir que a distribuição de probabilidade do preço do activo subjacente na maturidade da opção é lognormal. As cotações do activo base evoluem de acordo com um processo estocástico geométrico de Wiener com média e desvio padrão constantes.
- não existem custos de transacção ou impostos e todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
- o activo subjacente não paga dividendos até à data de maturidade da opção;
- não existem oportunidades de arbitragem;
- a negociação de títulos é contínua;
- é possível emprestar ou pedir emprestado à taxa de juro sem risco;
- a taxa de juro sem risco é constante e conhecida;
- não existem limites ao “*short-selling*”;
- as opções em causa são do tipo Europeu, só podendo ser exercidas na maturidade.

De acordo com o que foi anteriormente referido, a evolução do preço do activo subjacente pode ser então descrita pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S d\omega \quad [2.8]$$

onde,  $\mu$  representa o valor esperado da taxa de rendibilidade instantânea,  $\sigma$  é o desvio padrão instantâneo da taxa de rendibilidade e  $d\omega$  são incrementos derivados de um processo de Wiener “*standard*”, isto é, os incrementos são independentes e normalmente distribuídos com média nula e variância unitária no intervalo  $dt$ .

$$d\omega = \varepsilon_t \sqrt{dt} \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad d\omega \sim N(0,1)$$

Depois de formulada a hipótese relativamente ao modo com evolui a preço do activo subjacente, o passo seguinte<sup>21</sup> consiste em construir uma carteira constituída por opções de compra e activo subjacente.

---

<sup>20</sup> Ver, por exemplo, Hull (1998), página 255.

<sup>21</sup> Ver, por exemplo, Elton e Gruber (1995), páginas 601-602.

O valor da carteira criada ( $V$ ) é dado por:

$$V = Q_c C + Q_s S \quad [2.9]$$

em que,  $C$  é o preço da opção de compra,  $S$  é o preço do activo subjacente,  $Q_c$  é a quantidade de opções de compra adquiridas e  $Q_s$  a quantidade de activo subjacente em carteira. A variação do valor da carteira num período de tempo infinitesimal será dado por:

$$dV = Q_c dC + Q_s dS \quad [2.10]$$

Uma vez que a carteira constituída visa ser isenta face ao risco, então o seu valor deverá aumentar à taxa de juro sem risco no mercado à medida que o tempo passa:

$$rVdt = Q_c dC + Q_s dS \quad [2.11]$$

Substituindo na equação anterior  $V$  pela equação [2.9] e tendo em atenção que a cobertura do risco vai ser feita através da aquisição de opções de compra,

$$Q_s = +1 \quad \text{e} \quad Q_c = \frac{-1}{\partial C / \partial S}$$

recorrendo à equação [2.11] e substituindo pelos resultados anteriores vem:

$$r \left[ S - \frac{C}{\partial C / \partial S} \right] dt = dS - \frac{1}{\partial C / \partial S} dC \quad [2.12]$$

resolvendo em ordem a  $dC$  vem:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS - r \frac{\partial C}{\partial S} \left[ S - \frac{C}{\partial C / \partial S} \right] dt = \frac{\partial C}{\partial S} dS - rS \frac{\partial C}{\partial S} dt + rCdt \quad [2.13]$$

Sendo que o processo de evolução do preço do activo subjacente é descrito pela equação [2.8], utilizando o “Lema de Itô” vem:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \quad [2.14]$$

Substituindo  $dC$  na equação [2.13] pela expressão acima, vem:

$$\frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt = \frac{\partial C}{\partial S} dS - rS \frac{\partial C}{\partial S} dt + rCdt$$

Subtraindo  $(\partial C/\partial S) dS$  a cada um dos lados da equação e dividindo tudo por  $dt$  vem:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rS \frac{\partial C}{\partial S} + rC \quad [2.15]$$

A equação diferencial acima exposta é a chamada equação diferencial de Black-Sholes e estabelece a condição que o preço de uma opção de compra deve satisfazer em cada momento. É importante salientar que a equação [2.15] é a mesma, independentemente do tipo de opção (compra ou venda), ou qualquer outro activo financeiro cujo preço seja função do preço de um activo subjacente e da variável tempo, e em que a evolução do preço do activo subjacente seja governado por um processo geométrico de Wiener.

A solução da equação [2.15], para um activo financeiro derivado específico, depende das condições de fronteira que especificam os valores limites para o preço do activo derivado, e para as variáveis tempo e preço do activo subjacente.

No caso de uma opção de compra Europeia as condições de fronteira são definidas por:

- na data de vencimento da opção o valor da opção de compra é dado pela expressão:

$$C(S_T, 0, X) = \max[S_T - X; 0] \quad \text{e}$$

- $0 \leq S_T < \infty$  e  $0 \leq t < T$

Na resolução da equação diferencial [2.15] em ordem a  $C$ , Black e Sholes recorreram à equação de transferência de calor da física e as condições de fronteira atrás definidas obtendo a seguinte solução para o problema:

$$C(S_t, \tau, X, \sigma, r) = S_t \Phi(d_1) - Xe^{-r\tau} \Phi(d_2) \quad [2.16]$$

Com base num raciocínio análogo podemos obter a expressão que o preço de uma opção de venda deverá satisfazer em cada momento:

$$P(S_t, \tau, X, \sigma, r) = Xe^{-r\tau} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) \quad [2.17]$$

onde,  $S_t$  é o preço do activo subjacente no momento presente  $t$ ,  $\tau$  é o intervalo de tempo até à maturidade da opção (em anos),  $r$  é a taxa de juro sem risco, anualizada e capitalizada continuamente e  $\Phi(d_i)$  é a função de probabilidade cumulativa de uma variável normal “standard”,<sup>22</sup> e

---

<sup>22</sup> Isto é, a probabilidade de tal variável ser menor que  $d_i$ .

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \times \tau}{\sigma \times \sqrt{\tau}} \quad [2.18]$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times \tau}{\sigma \times \sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma \times \sqrt{\tau} \quad [2.19]$$

Da observação das fórmulas que determinam o preço de uma opção, facilmente se constata que são de fácil aplicação, na medida em que todos os parâmetros necessários para o cálculo estão imediatamente disponíveis, exceptuando a volatilidade do retorno do activo subjacente ( $\sigma$ ) associada ao tempo remanescente para a maturidade da opção. Esta poderá ser estimada com base em informação histórica ou recorrendo a processos mais complexos, nomeadamente através da estimação de modelos econométricos ARCH e GARCH<sup>23</sup>.

### 2.2.3 A “Risk-Neutral Valuation” e a fórmula de Black-Sholes

Uma característica importante na equação fundamental do modelo Black-Sholes expressa pela equação [2.15] e nas equações [2.16] e [2.17], é o facto de as mesmas não dependerem de nenhum parâmetro que envolva a atitude dos investidores em relação ao risco, tal como a taxa de rendibilidade esperada do activo subjacente  $\mu$  ou o prémio de risco. Deste modo, as soluções das equações serão as mesmas, independentemente das preferências dos investidores em relação ao risco. Uma explicação para esta independência da solução das equações face às preferências dos agentes assenta no facto de que se os agentes fossem, por exemplo, avessos ao risco, então a taxa de rendibilidade esperada do activo subjacente deveria ser necessariamente superior à taxa de juro sem risco do mercado. Esta situação levaria a um aumento do rendimento esperado da opção na maturidade, contudo, a taxa de actualização aplicada a este “*payoff*” seria também ela superior à taxa de juro sem risco, dando origem a que os dois efeitos se anulassem. A hipótese mais simples para calcular o valor de uma opção consiste na assunção de que os investidores são neutros em relação ao risco.

---

<sup>23</sup> ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity), GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity). Sobre este tema consultar, por exemplo, Bera e Matthew (1993), Day e Craig (1993), Jarrow (1998) e Brigo e Mercurio (2000).

De acordo com o que já foi apresentado no ponto 2.2.1 o rendimento gerado por uma opção de compra Europeia na maturidade do contrato é dado por  $\max[(S_T - X), 0]$ . Sob a hipótese do princípio da neutralidade dos investidores face ao risco, o valor de uma opção em qualquer momento  $t < T$  será dado pelo valor esperado<sup>24</sup> do “payoff” da opção na maturidade actualizado à taxa de juro sem risco  $r^{25}$  para o momento  $t$ . No caso de uma opção de compra:

$$C(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} E_t[\max(S_T - X, 0)] \quad [2.20]$$

Para uma opção de venda teremos,

$$P(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} E_t[\max(X - S_T, 0)] \quad [2.21]$$

com,  $\tau = T - t$

As equações [2.20] e [2.21] podem ser reescritas, fazendo  $Prob(.) = p(.)$

$$C(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} [p[S_T \leq X] \times 0 + p[S_T > X] \times E[S_T - X | S_T > X]] \quad [2.22]$$

$$P(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} [p[S_T \leq X] \times E[X - S_T | S_T < X] + p[S_T > X] \times 0] \quad [2.23]$$

Tendo em consideração que<sup>26</sup>

- $p[S_T \leq X] = \int_{-\infty}^X q(S_T) dS_T$
- $p[S_T > X] = \int_X^{\infty} q(S_T) dS_T$
- $E[S_T - X | S_T > X] = \left[ \frac{\int_X^{\infty} S_T q(S_T) dS_T}{\int_X^{\infty} q(S_T) dS_T} \right] - X$
- $E[X - S_T | S_T < X] = X - \left[ \frac{\int_{-\infty}^X S_T q(S_T) dS_T}{\int_{-\infty}^X q(S_T) dS_T} \right]$

onde,  $q(.)$  representa um função de densidade de probabilidade lognormal.

---

<sup>24</sup>  $E_t$  é o operador valor esperado no momento presente,  $t$ .

<sup>25</sup> Na exposição vamos assumir que a taxa de juro sem risco é conhecida e constante no intervalo  $[t; T]$ .

<sup>26</sup> Ver, por exemplo, Larson (1982).



Substituindo estes resultados nas expressões [2.22] e [2.23] vem,

$$C(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} \left[ \int_X^\infty q(S_T) dS_T \left[ \frac{\int_X^\infty S_T q(S_T) dS_T}{\int_X^\infty q(S_T) dS_T} - X \right] \right] \text{ simplificando,}$$

$$C(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} \left[ \int_X^\infty S_T q(S_T) dS_T - X \int_X^\infty q(S_T) dS_T \right] \quad [2.24]$$

$$P(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} \left[ \int_{-\infty}^X q(S_T) dS_T \left[ X - \frac{\int_{-\infty}^X S_T q(S_T) dS_T}{\int_{-\infty}^X q(S_T) dS_T} \right] \right] \text{ simplificando,}$$

$$P(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} \left[ X \int_{-\infty}^X q(S_T) dS_T - \int_{-\infty}^X S_T q(S_T) dS_T \right] \quad [2.25]$$

No caso de pretendermos calcular o preço de uma opção de compra e tendo em atenção a equação [2.24], necessitamos apenas de resolver os dois integrais envolvidos na mesma. O primeiro integral pode ser escrito da seguinte forma<sup>27</sup>:

$$\int_X^\infty S_T q(S_T) dS_T = S_t e^{r\tau} \Phi(d_1) \quad [2.26]$$

No que diz respeito ao segundo integral, o mesmo traduz a probabilidade de a taxa de rendibilidade do activo subjacente do momento presente até à maturidade ser superior a  $(X - S_t)/S_t \approx \ln(X/S_t)$ , isto é,

$$\int_X^\infty q(S_T) dS_T = p[S_T > X] = p[(S_T - S_t)/S_t > (X - S_t)/S_t] = p[\ln(S_T/S_t) > \ln(X/S_t)] \quad [2.27]$$

Uma vez que  $S_T$  tem uma distribuição lognormal, com média e desvio padrão dados respectivamente, por  $E(\ln(S_T))$  e  $\sigma\sqrt{\tau}$ , logo a taxa de rendibilidade do activo subjacente até à maturidade  $\ln(S_T/S_t) = \ln(S_T) - \ln(S_t)$ , segue uma distribuição Normal com média e desvio padrão dados, respectivamente, por  $E[\ln(S_T)] - \ln(S_t)$  e  $\sigma\sqrt{\tau}$ . Numa economia neutra em relação ao risco, todos os activos têm a mesma rendibilidade, igual como é óbvio, à taxa de rendibilidade do activo sem risco, donde se pode escrever,  $E[S_T] = S_t e^{r\tau}$ .

---

<sup>27</sup> Ver, por exemplo, Jarrow e Rudd (1983).

“Standardizando” a variável,  $\ln(S_T / S_t)$ , subtraindo-lhe a média<sup>28</sup> e dividindo pelo desvio padrão ficamos na presença de uma variável Normal “*standard*”, com média 0 e desvio padrão igual a 1, dada por:

$$\frac{\ln(S_T / S_t) - \left(r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad [2.28]$$

Podemos agora resolver o integral dado pela equação [2.27], assim,

$$\begin{aligned} \int_X^\infty q(S_T) dS_T &= p[S_T > X] = p[(S_T - S_t)/S_t > (X - S_t)/S_t] = p\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) > \ln\left(\frac{X}{S_t}\right)\right] \\ &= p\left[\frac{\ln(S_T / S_t) - \left(r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(X / S_t) - \left(r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] = 1 - \Phi(-d_2) \end{aligned}$$

Pela propriedade de simetria da distribuição normal, podemos escrever:

$$\int_X^\infty q(S_T) dS_T = p[S_T > X] = \Phi(d_2) \quad [2.29]$$

Substituindo em [2.24] as expressões [2.26] e [2.29] tem-se,

$$C(S_t, \tau, X) = S_t \Phi(d_1) - Xe^{-r\tau} \Phi(d_2)$$

que tem um valor exactamente igual à fórmula de Black-Sholes apresentada na expressão [2.16] da secção anterior. Com base no mesmo tipo de raciocínio é possível chegar a mesma conclusão para o preço de uma opção de venda.

O facto de a fórmula de Black-Sholes poder ser obtida actualizando à taxa de juro sem risco, o valor esperado do “*payoff*” de uma opção na maturidade foi observado por Cox e Ross (1976).

Com base nos resultados anteriores, constata-se o que já tinha sido referido anteriormente. No modelo de Black-Sholes e em outros modelos de valorização de

---

<sup>28</sup> Note-se que, pela relação existente entre o valor esperado de um logaritmo e o logaritmo do valor esperado e pelo facto de  $E[S_T] = S_t e^{r\tau}$ , então:

$$E(\ln(S_T)) - \ln(S_t) = r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau$$

opções como, por exemplo, o modelo binomial, o rendimento esperado do activo subjacente não é determinante para o cálculo do prémio de uma opção. Nesse sentido, uma vez que é o rendimento esperado que deverá traduzir o maior ou menor apetite dos investidores pelo risco, pois incorpora o chamado prémio de risco, pode concluir-se que a determinação do preço de uma opção não depende do grau de preferência pelo risco dos investidores.

De uma forma simples, pode dizer-se que a fixação dos preços das opções assenta no princípio da ausência de oportunidades de arbitragem no mercado. Assim, o perfil de ganhos e perdas de uma opção pode ser replicado através da constituição de uma carteira composta por outros activos. Na ausência de oportunidades de arbitragem, o valor da opção é igual ao valor da carteira que replica o “*payoff*” da opção, não sendo influenciado pelas preferências dos agentes. Em geral, admite-se que os investidores são neutros face ao risco, na medida em que, esta hipótese simplifica o cálculo do preço das opções.

Harrison e Kreps (1979) demonstraram que independentemente do processo estocástico assumido para a evolução do preço do activo subjacente, na ausência de oportunidades de arbitragem, o valor das opções pode ser calculado tendo em conta o “*payoff*” da opção na maturidade actualizado à taxa de juro sem risco. Nesse sentido, os prémios de uma opção de compra ou venda serão sempre dados, respectivamente, por:

- $C(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} E_t [\max(S_T - X, 0)]$
- $P(S_T, \tau, X) = e^{-r\tau} E_t [\max(X - S_T, 0)]$

É importante referir que o valor esperado no presente,  $E_t[.]$ , do “*payoff*” da opção na maturidade, é calculado com base numa função de densidade de probabilidade, conhecida por função de densidade de probabilidade neutra ao risco, em princípio, diferente da verdadeira função de densidade de probabilidade do preço do activo subjacente na maturidade. Esta situação decorre do facto de a FDPNR incorporar as preferências dos agentes em relação ao risco e como tal não ser igual à função de densidade de probabilidade subjectiva assumida pelos agentes que actuam no mercado.

Na realidade, os investidores parecem ser avessos face ao risco, logo, os preços das opções incorporam não só as expectativas dos agentes relativamente aos rendimentos futuros mas também as suas preferências face ao risco.

Mais, nada nos diz que os agentes utilizam a totalidade, ou da forma mais correcta, a informação disponível no mercado, podendo esta situação levar a que a própria função de densidade de probabilidade subjectiva (assumida pelos agentes) seja também diferente da verdadeira função. Contudo, assumindo que os agentes são racionais e que utilizam de uma forma eficiente toda a informação disponível, o que equivale a dizer que a função de densidade de probabilidade assumida pelos agentes é a verdadeira, então, tendo por base alguns processos estocásticos para a evolução do preço do activo subjacente (por exemplo, evoluir de acordo com um Movimento Geométrico Browniano), a função de densidade de probabilidade estimada é semelhante à função de densidade de probabilidade verdadeira diferindo apenas no parâmetro que determina a localização da mesma, de modo a que a rendibilidade esperada do activo subjacente seja igual à taxa de juro sem risco.

Bahra (1996) refere que, mesmo sendo a FDPNR ligeiramente diferente da verdadeira função de densidade de probabilidade, sob a hipótese que o grau de aversão ao risco do mercado é relativamente estável ao longo do tempo, as alterações observadas na FDPNR de um dia para o outro, deverão traduzir principalmente as alterações das expectativas dos agentes face à evolução futura do preço do activo subjacente e como tal alterações na verdadeira função de densidade de probabilidade.

#### **2.2.4 As limitações do modelo Black-Sholes, a volatilidade implícita e o “Risk Reversal”**

No modelo clássico de Black-Sholes, é assumida a hipótese que o preço do activo subjacente segue um processo estocástico conhecido como Movimento Geométrico Browniano. Este processo admite que para o activo subjacente é esperada uma taxa de rendibilidade constante, contudo, a evolução do preço do mesmo é independente, possuindo uma distribuição normal ao longo do período de vida da opção. Sob estas hipóteses, as probabilidades neutras face ao risco associadas aos possíveis preços futuros do activo subjacente na data de maturidade da opção assumem a forma de uma distribuição lognormal.

A estimação da função de densidade de probabilidade implícita, numa situação na qual o modelo de Black-Sholes fosse considerado válido na íntegra, resumir-se-ia à estimação de um único parâmetro, a variância. A variância conjuntamente com uma

estimativa pontual para a taxa de rendibilidade do activo subjacente obtida, por exemplo, com base no preço de um futuro sobre o activo, permitiriam definir a verdadeira função de densidade de probabilidade. Sendo  $\hat{\sigma}$  uma estimativa para a volatilidade, então a função densidade de probabilidade neutra ao risco do activo subjacente na data de vencimento do contracto da opção, traduzir-se-ia numa função densidade de probabilidade lognormal caracterizada pelos parâmetros:

$$\left( \ln(S_t) + \left( r - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau, \hat{\sigma}^2 \tau \right)$$

Donde a função de densidade de probabilidade lognormal assentaria na seguinte expressão:

$$q(S_T) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi} \hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \exp \left[ - \left[ \frac{\ln(S_T) - \left( \ln(S_t) + \left( r - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau \right)}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \right]^2 / 2 \right] \quad [2.30]$$

Se abandonarmos a hipótese da neutralidade dos agentes face ao risco, a taxa de rendibilidade esperada do activo subjacente,  $\mu$ , deverá substituir a taxa de juro sem risco  $r$  na expressão acima, e ficamos perante a verdadeira função de densidade de probabilidade.

$$q(S_T) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi} \hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \exp \left[ - \left[ \frac{\ln(S_T) - \left( \ln(S_t) + \left( \mu - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) \tau \right)}{\hat{\sigma} \sqrt{\tau}} \right]^2 / 2 \right] \quad [2.31]$$

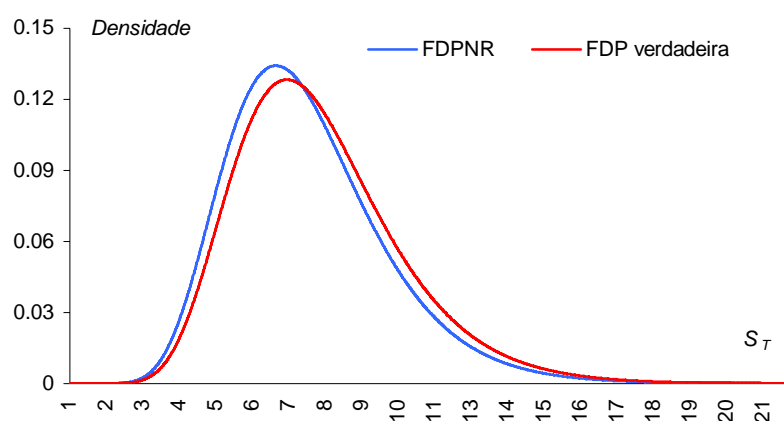
Admitamos, por exemplo, uma opção de compra sobre o activo TESE com um preço de exercício de 8 €, data de vencimento daqui a um ano, e cujo prémio no mercado é de 1 €. O preço actual do activo TESE no mercado é de 7.5 €, a sua taxa de rendibilidade anual esperada é de 15% e a taxa de juro sem risco no mercado, anual, é de 6%. A estimativa para a volatilidade é obtida a partir da volatilidade implícita<sup>29</sup> no preço da opção com base no modelo de Black-Sholes, conforme o sugerido inicialmente por Latané e Rendleman (1976). Com base nesta informação compara-se na figura 2.2 a FDPNR e a verdadeira função de densidade de probabilidade para o preço do activo

---

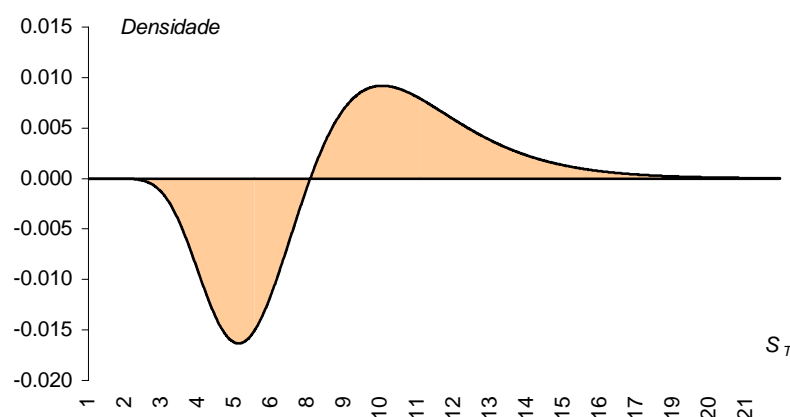
<sup>29</sup> Mais à frente iremos abordar com mais detalhe a questão da volatilidade implícita. O valor obtido para a volatilidade implícita (34.08%) foi estimado recorrendo à utilização do *software* DerivaGem.

subjacente na data da maturidade da opção, apresentando-se na figura 2.3 as diferenças em termos de distribuição da massa de probabilidade entre as duas funções.

**Figura 2.2:** Função de densidade de probabilidade neutra ao risco e a verdadeira função de densidade de probabilidade



**Figura 2.3:** Diferenças na distribuição da massa de probabilidade entre as duas funções de densidade de probabilidade



Apesar da sua grande utilização na valorização de opções, e do seu relativo sucesso, a realidade parece mostrar que os preços das opções estimados de acordo com a fórmula de valorização de Black-Sholes diferem sistematicamente dos preços das opções observados no mercado.

Por outro lado, é também usual encontrar no mercado opções sobre um mesmo activo, embora com preços de exercício e períodos até à maturidade diferentes, para as quais a volatilidade implícita não é idêntica. A observação destes padrões de volatilidade deu origem ao surgimento na literatura de dois novos conceitos: o conceito de “*volatility smile*” e o conceito de estrutura temporal de volatilidade.

O “*volatility smile*” refere-se ao padrão gráfico exibido para a relação entre a volatilidade implícita nas opções com a mesma maturidade e o seu respectivo preço de exercício.

O conceito de estrutura temporal de volatilidade refere-se ao padrão gráfico desenhado pela volatilidade implícita de opções com o mesmo preço de exercício, mas com maturidades diferentes.

Black (1975), observou que a fórmula de Black-Sholes tende a sobrevalorizar as opções de compra profundamente “*in-the-money*” e a subvalorizar as opções de compra profundamente “*out-of-the-money*”, esta constatação significa que as volatilidades implícitas tendem a aumentar com o preço de exercício o que se traduz numa curva “*smile*” positivamente inclinada.

MacBeth e Merville (1979), efectuaram um estudo em compararam as volatilidades implícitas nos preços de opções de compra sobre o mesmo activo subjacente e com o mesmo tempo para a maturidade, mas com preços de exercício diferentes, concluindo que as volatilidades implícitas tendem a ser superiores para opções “*in-the-money*” e relativamente baixas para opções “*out-of-the-money*”, o que se traduziria numa curva “*smile*” negativamente inclinada. A mesma conclusão foi obtida por Toft e Prucyk (1997), que constatarem que as opções de compra individuais sobre acções tendem a exhibir curvas “*smile*” negativamente inclinadas.

Rubinstein (1994), num estudo utilizando opções sobre o índice S&P 500, observou que opções com preços de exercício mais baixos possuem volatilidades implícitas superiores às opções com preços de exercício mais elevados. A mesma conclusão foi obtida por estudo efectuado por Derman e Kani (1994). Campa, Chang e Reider (1998), encontraram evidência de que as opções sobre taxas de câmbio muitas vezes são caracterizadas pela presença de uma curva “*smile*” em forma de U.

Em outros estudos<sup>30</sup> como os de Shastri e Tandon (1986), Chance (1986), Bodurtha e Courtadon (1987), parece igualmente encontrar-se evidência da existência de diferenças entre os preços das opções observados no mercado e os preços das opções calculados de acordo com a fórmula de Black-Sholes.

A principal explicação para os resultados obtidos nos estudos atrás referidos parece estar associada, de acordo Hull (1998), às diferenças existentes entre a distribuição

---

<sup>30</sup> Conforme referido por Hull (1998).

lognormal assumida pelo modelo de Black-Sholes para a distribuição do preço do activo subjacente na data da maturidade da opção e a verdadeira distribuição assumida pelo mercado.

Como vimos anteriormente, na fórmula de Black-Sholes apenas um dos parâmetros necessários para o cálculo do preço de uma opção não é directamente observável no mercado<sup>31</sup>, mas sendo o prémio da opção uma função unívoca dos parâmetros e directamente observável no mercado, pode utilizar-se o preço das opções, na fórmula de Black-Sholes e os restantes parâmetros conhecidos para se obter uma estimativa para volatilidade. Dados os preços das opções observados no mercado, podemos inverter a equação [2.16] de forma a que a volatilidade ( $\sigma$ ) seja expressa em função de  $S$ ,  $X$ ,  $r$ ,  $T$  e  $C$ , permitindo assim com base no preços observados das opções encontrar um valor para a volatilidade. À volatilidade calculada da forma anteriormente descrita chama-se volatilidade implícita<sup>32</sup>. Quando existem várias opções transaccionadas no mercado sobre o mesmo activo subjacente, com a mesma maturidade, mas preços de exercício diferentes, podemos estar perante uma situação em que existem várias estimativas para a volatilidade. Neste caso, coloca-se a questão de qual a estimativa a utilizar ou como integrar as diferentes estimativas de modo a obter um valor mais preciso para a volatilidade. Vários processos de ponderação têm sido propostos, desde simples médias aritméticas, a outros mais complexos e sofisticados, Beckers (1981), Chiras e Manaster (1982), Latané e Rendleman (1976) e Whaley (1982), discutem alguns desses processos<sup>33</sup>.

O modelo Black-Scholes assenta na hipótese de que a volatilidade implícita nos preços das opções é constante para todos os preços de exercício e para todas as opções sobre o mesmo activo subjacente com maturidades semelhantes. Contudo, a realidade mostra que as volatilidades implícitas nos preços das opções observados no mercado variam normalmente com o preço de exercício. Em particular, de acordo com Bahra (1996), as volatilidades implícitas parecem ser elevadas nas opções “*in-the-money*” e nas opções “*out-of-the-money*” e baixas nas opções “*at-the-money*”. Nesse sentido, a relação funcional

---

<sup>31</sup> Está-se a falar da volatilidade da taxa de retorno do activo subjacente.

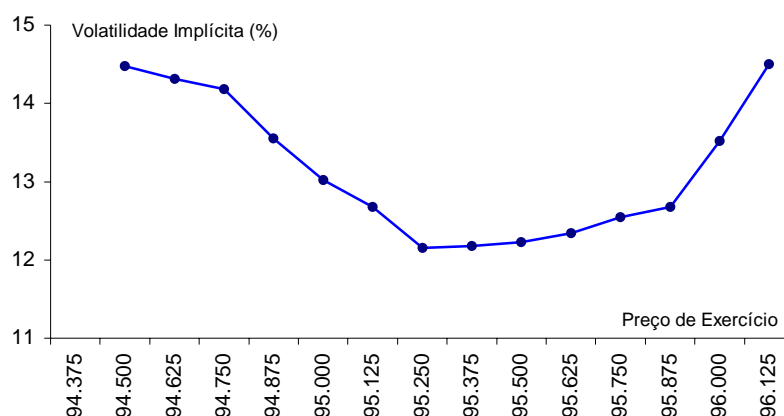
<sup>32</sup> Chama-se a atenção de que a fórmula de Black-Sholes não se poder resolver analiticamente em função da volatilidade. Existem, no entanto métodos numéricos iterativos que permitem calcular esse valor, sendo os mais utilizados o algoritmo de “*Newton-Raphson*” e o algoritmo de bissecção.

<sup>33</sup> Conforme referido por Hull (1998).



entre a volatilidade implícita nos preços das opções e os preços de exercício, tenderia a exhibir uma forma de U, e não a forma de uma recta horizontal caso a validade do modelo Black-Sholes fosse integral. Este efeito de divergência da relação funcional entre os diferentes preços de exercício de opções com características semelhantes e a volatilidade implícita associada a cada um deles, de uma recta horizontal, é conhecido no meio financeiro como sendo o efeito “sorriso” ou “*smile*”. Estudos como os efectuados por, Rubinstein (1994), MacBeth e Merville (1979), Derman e Kani (1994), Toft e Prucyk (1997), já aqui referidos, encontraram evidência empírica da não horizontalidade da relação entre os preços de exercício e volatilidade implícita. A figura 2.4 mostra um exemplo de uma curva “*smile*” ou curva do “*volatility smile*”.

**Figura 2.4:** Curva “*smile*” com base nos preços de opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000 em 28 de Abril de 2000



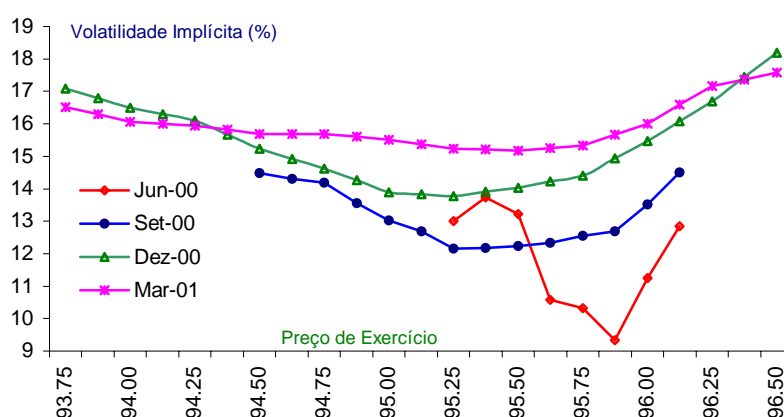
Fonte: LIFFE

A curva do “*volatility smile*” fornece alguma informação relativamente à semelhança entre a função de densidade de probabilidade real, assumida pelo mercado, e a função de densidade lognormal assumida no modelo Black-Scholes. Quanto mais acentuada é a curva, maior é a probabilidade de que o valor do activo subjacente, na data do vencimento, esteja longe do actual preço de mercado. Esta situação deve-se ao facto de que quanto maior a volatilidade, maior será a probabilidade de a opção estar “*in-the-money*” na data da maturidade, levando a um aumento do preço da opção.

O “*volatility smile*” traduz assim a percepção do mercado relativamente à possibilidade de ocorrerem flutuações substanciais do preço, sejam elas negativas ou positivas, mais frequentemente do que o que é assumido pelo modelo Black-Sholes. Desta forma, os preços das opções indicam que a função de densidade de probabilidade do mercado tem as abas mais largas que a função de densidade lognormal inerente a fórmula de

Black-Sholes. Consta-se igualmente que a volatilidade implícita nos preços das opções não se apresenta constante para opções com o mesmo preço de exercício e maturidades diferentes. Em geral observa-se que, para opções com o mesmo preço de exercício<sup>34</sup>, a volatilidade implícita mostra tendência a crescer com a maturidade, conforme é ilustrado na figura 2.5. Verifica-se igualmente que as curvas “smile” tendem a ser mais pronunciadas à medida que o tempo até maturidade da opção diminui, em linha com o que é referido por Jackwerth (1999) e Tompkins (1998) .

**Figura 2.5:** Curvas “smile” estimadas com base nos preços de opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses em 28 de Abril de 2000 para diferentes maturidades<sup>35</sup>



Fonte: LIFFE

O modelo de Black-Sholes tem igualmente implícita uma função de densidade de probabilidade simétrica, em que a probabilidade de uma opção de venda “out-of-the-money” estar “in-the-money” é igual à probabilidade de uma opção de compra com as mesmas características estar “in-the-money” na data de vencimento do contracto. Porém, a realidade mostra que a distribuição é geralmente assimétrica, podendo este resultado ser constatado, por exemplo, através dos preços dos chamados “risk reversals”.

Um “risk reversal” consiste numa transacção na qual uma opção de compra “out-of-the-money” é trocada por uma opção de venda equivalente, igualmente

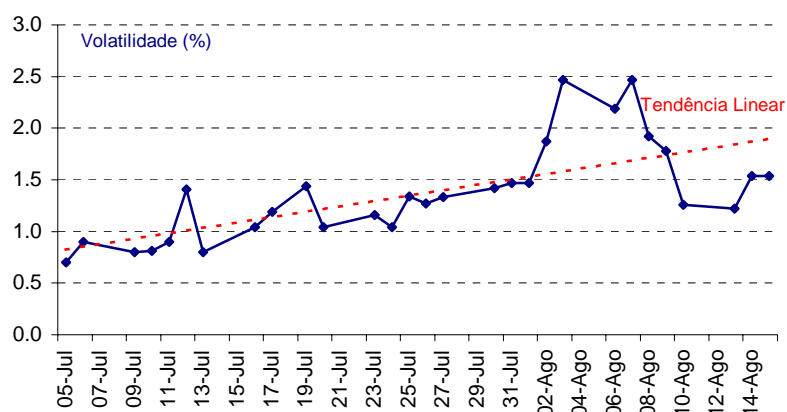
<sup>34</sup> Ver, por exemplo, Coutant, Jondeau e Rockinger (2001), Panigirtzoglou (2000), Jarrow (1998). Na sequência deste resultado, será efectuada na secção 4.7 uma análise da relação existente entre a dispersão das FDPNR e o horizonte temporal compreendido entre o momento da estimação e o para o qual se refere a distribuição.

<sup>35</sup> Por forma a simplificar a figura excluíram-se os valores constantes para a volatilidade associados as abas esquerda e direita das curvas “smile”.

“out-of-money”, sobre o mesmo activo subjacente e com a mesma maturidade, sendo que duas opções são igualmente “out-of-money” se tiverem o mesmo delta<sup>36</sup> em valor absoluto. Uma vez que a opção de compra e a opção de venda, com as mesmas características, não possuem geralmente o mesmo valor, uma das partes envolvidas na transação terá que compensar a outra num montante correspondente à diferença de valor entre as duas opções. Este valor resulta da diferença entre as volatilidades implícitas das duas opções envolvidas na transacção. Note-se que, de acordo com o vaticinado pelo modelo de Black-Sholes, o preço de um “risk reversal” deveria ser zero.

Se o preço de um “risk reversal” é positivo, encontramos-nos face a uma situação que pode traduzir uma percepção do mercado segundo a qual a probabilidade da opção de compra gerar lucro na maturidade é superior à probabilidade da opção de venda. Isto é, o mercado atribui uma maior probabilidade a possibilidade de subida do preço do activo subjacente do que à sua descida. Esta situação implica uma função de densidade de probabilidade assimétrica não correspondendo assim à função de densidade em que assenta a fórmula de Black-Sholes. Na figura 2.6 apresenta-se uma ilustração prática simples da evolução do preço do “risk reversal”, medido em unidades de volatilidade, para o contrato de opções sobre futuros da taxas de juro EURIBOR a 3 meses de Setembro de 2001.

**Figura 2.6:** Evolução do preço do “risk reversal” medido em unidades de volatilidade, para opções com delta próximo de 0.20 em valor absoluto sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses com vencimento em Setembro de 2001



Fonte: LIFFE

<sup>36</sup> O delta de uma opção é definido como sendo a primeira derivada do preço da opção em relação ao preço do activo subjacente, traduzindo a variação do preço da opção resultante de um aumento de uma unidade do preço do activo subjacente. Neste sentido o delta de uma opção de compra é sempre positivo, enquanto que o delta de uma opção de venda é sempre negativo.

A figura 2.6 mostra as expectativas crescentes de descida de taxas de juro durante período que mediou entre 5 de Julho e 15 de Agosto de 2001, traduzidas pelos preços positivos e crescentes para o “*risk reversal*”. O raciocínio presente nesta interpretação decorre do facto de que, se o preço do “*risk reversal*” é positivo significa que o mercado está a atribuir uma maior probabilidade às opções de compra “*out-of-money*” gerarem um lucro positivo na maturidade do que às opções de venda com as mesmas características. Isto significa que o mercado atribui uma maior probabilidade à subida do preço do futuro sobre a taxa de juro EURIBOR a 3 meses do que à descida do mesmo. Sendo o preço do futuro definido como  $(100 - \text{taxa de juro implícita no futuro})$  o mercado está assim antecipar uma descida das taxas de juro.

Em síntese, apesar da sua grande utilização e relativo sucesso, na determinação dos preços de opções e cálculo de volatilidades implícitas, o modelo Black-Sholes demonstra algumas fragilidades decorrentes do facto de muitas das suas hipóteses parecerem não reflectir o que se passa no mundo real. Esta situação traduz-se, por exemplo, no facto de os preços das opções calculados de acordo com o modelo diferirem sistematicamente dos preços observados no mercado. Em particular, a hipótese de que o preço do activo subjacente apresentar uma distribuição lognormal na data do vencimento da opção e a volatilidade constante assumida para os diferentes preços de exercício e ao longo do tempo parecem ser rejeitadas pela grande maioria dos activos financeiros existentes, em particular acções e taxas de câmbio. De facto, a volatilidade aparenta não ser estável longo do tempo e as distribuições dos preços dos activos tendem a diferir, em alguns casos substancialmente, da distribuição lognormal assumida pelo modelo Black-Sholes.

Neste contexto, parece ser importante o recurso a metodologias que permitam uma estimação mais consistente da função de densidade de probabilidade implícita nos preços das opções, para os preços dos activos subjacentes na data da maturidade da opção. No próximo capítulo serão assim apresentadas algumas das abordagens alternativas existentes bem como as suas principais vantagens e desvantagens.

### **3. Técnicas de estimação de funções de densidade de probabilidade para os preços de activos com base nos prémios de opções sobre os mesmos**

Este capítulo pretende dar a conhecer ao leitor a grande variedade de abordagens existentes no âmbito da estimação das funções de densidade de probabilidade neutras ao risco implícitas nos preços das opções. Serão apresentadas de uma forma mais detalhada as metodologias mais relevantes, algumas das quais serão posteriormente utilizadas na parte empírica deste trabalho. Pretende-se igualmente explicar a relação existente entre os preços das opções e as funções de densidade de probabilidade decorrente do trabalho teórico desenvolvido por Breeden e Litzenberger (1978).

O capítulo está organizado da seguinte forma: depois de uma breve apresentação das diferentes abordagens existentes para a estimação das FDPNR, a secção 3.1 centra-se na análise da relação existente entre os preços das opções e as FDPNR, no âmbito dos desenvolvimentos de Breeden e Litzenberger (1978); na secção 3.2 serão apresentadas algumas das metodologias existentes, nomeadamente, a estimação das FDPNR a partir das volatilidades implícitas, com base na construção de árvores binomiais, admitindo uma estrutura *ex-ante* para a estrutura funcional da função, a partir de hipóteses formuladas para a evolução do preço do activo subjacente e recorrendo a uma abordagem não paramétrica. Numa última secção é efectuada uma síntese de alguns estudos que procuraram avaliar qual a melhor metodologia, bem como uma exposição geral dos aspectos positivos e negativos dos diferentes métodos apresentados e das limitações que, independentemente do método utilizado, condicionarão sempre a análise a efectuar.

Existe uma grande variedade de técnicas utilizadas para a estimação das funções de densidade de probabilidade do preço de activos financeiros utilizando os preços de opções sobre esses activos. Contudo, podemos classificar as diferentes abordagens existentes em 5 grandes categorias.

Numa primeira, a função de densidade de probabilidade é estimada com base em hipóteses colocadas sobre o processo estocástico que governa a evolução do preço do activo subjacente e consiste em derivar a função de densidade de probabilidade implícita nesse processo. [Bates (1996); Malz (1995)]

Uma segunda classe, engloba os métodos em que são assumidas hipóteses *ex-ante* sobre a forma funcional da própria função de densidade de probabilidade, sendo os parâmetros desta estimados posteriormente, por forma a minimizar uma função distância entre os prémios das opções observados no mercado e os que são gerados de acordo com a forma paramétrica assumida. [Melick e Thomas (1997); Bahra (1996,1997); Söderlind e Svensson (1998); Leahy e Thomas (1996); Gemmill e Saflekos (2000); Bliss e Panigirtzoglou (2000)]

Numa terceira categoria, a função densidade de probabilidade é obtida directamente de uma especificação paramétrica para a função utilizada no cálculo do preço da opção de compra (ou da função prémio da opção de venda) ou ainda da volatilidade implícita associada à curva “*smile*” através de processos de diferenciação. [Bates (1991); Shimko (1993); Malz (1997a); Campa, Chang e Reider (1998)]

Numa quarta classe, começa por estimar-se numa primeira fase, uma determinada densidade candidata a função de densidade de probabilidade, em geral de formato simples. A função de densidade de probabilidade é depois reestimada como sendo a densidade que verifica duas condições: minimiza a distância em relação à densidade estimada na primeira fase e minimiza a distância em relação aos prémios das opções observados no mercado. [Jackwerth e Rubinstein (1996); Rubinstein (1994); Derman e Kani (1994); Derman, Kani e Chriss (1996)]

Num quinto grupo a função de densidade de probabilidade é estimada com base numa abordagem não paramétrica, isto é, em que não são feitas quaisquer restrições paramétricas sobre os parâmetros ou forma funcional da mesma, sobre a dinâmica seguida pelo preço do activo subjacente ou sobre a função de cálculo do prémio da opção ou volatilidade implícita. [Aït-Sahalia e Lo (1998)]

No que diz respeito às abordagens que seguem uma vertente paramétrica<sup>37</sup>, à parte das que se baseiam na formulação de hipóteses para o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente, é possível classificá-las em duas grandes classes. A primeira engloba as técnicas que recorrem a utilização da equação de valorização dos preços das

---

<sup>37</sup> Estamos a referir-nos as categorias 1 a 4.

opções desenvolvida por Cox e Ross (1976)<sup>38</sup>, caso dos trabalhos de Melick e Thomas (1997) e Bahra (1996,1997), a segunda abrange as metodologias que recorrem a segunda derivada da mesma equação<sup>39</sup>, caso dos trabalhos de Shimko (1993), Malz (1997a), Neuhaus (1995), Jackwerth e Rubinstein (1996).

### 3.1 A relação entre os preços das opções e as funções de densidade de probabilidade

A diferença entre os preços de duas opções (de compra ou venda) Europeias com preços de exercício diferentes, a mesma maturidade, sobre o mesmo activo subjacente e sob a hipótese de os agentes serem neutros face ao risco, pode fornecer informação importante relativa ao juízo que os investidores fazem sobre a probabilidade de o preço do activo subjacente cair, na data da expiração do contrato, entre os dois preços de exercício em causa. É esta a relação básica que constitui o fundamento da utilização dos preços das opções para derivar as funções de densidade de probabilidade associadas aos desenvolvimentos futuros dos preços dos activos subjacentes.

#### 3.1.1 A abordagem de Breeden e Litzenberger (1978)

Num mercado completo, caracterizado pela existência de um número de activos transaccionados igual ao número de estados natureza possíveis, ou em que existe um número suficiente de possibilidades temporais para a realização de transacções intermédias que possibilite um reajustamento dinâmico de carteiras igual ao número de estados natureza, Ross (1976) mostrou que era possível obter a distribuição completa de

---

<sup>38</sup> O modelo de Cox e Ross (1976), dá-nos o preço actual de uma opção de compra Europeia como sendo o “*payoff*”, neutro ao risco, esperado da opção na data do seu vencimento  $T$ , actualizado à taxa de juro sem risco  $r$ , isto é,

$$C(X) = e^{-r \cdot \tau} \cdot \int_X^{\infty} (S_T - X) q(S_T) dS_T$$

onde,  $S_T$  é o preço final do activo subjacente em  $T$ ,  $q(S_T)$  é a FDPNR,  $X$  é o preço de exercício,  $r$  é a taxa de juro sem risco e  $\tau = T - t$  é a maturidade da opção.

<sup>39</sup>  $\frac{\partial^2 C(X)}{\partial X^2} = e^{-r \cdot \tau} \cdot q(S_T)$

probabilidade neutra ao risco de um conjunto de opções Europeias. Essa distribuição tenderá a ser única, sendo que foram Breeden e Litzenberger (1978) os primeiros a apresentarem uma fórmula exacta para a mesma.

Em particular, os autores derivaram uma relação que liga a função de cálculo do preço teórico de uma opção de compra à função de densidade de probabilidade terminal do preço do activo subjacente. Mais especificamente, demonstraram que numa situação em que os preços de exercício das opções abrangessem um intervalo contínuo, de zero até infinito, a segunda derivada parcial da função de cálculo do preço teórico da opção em relação ao preço de exercício era directamente proporcional à função de densidade de probabilidade final do preço do activo subjacente não sendo, por isso, necessário assumir qualquer tipo de hipótese relativamente à estrutura da distribuição ou ao processo que governa a evolução do preço do activo subjacente para se estimar a função de densidade de probabilidade.

No que diz respeito às hipóteses assumidas pelos autores, para a derivação desta relação, estas assentam basicamente no facto de os mercados serem considerados perfeitos<sup>40</sup> e na inexistência de oportunidades de arbitragem. Para além destas duas hipóteses, o outro requisito que os autores colocam é a necessidade de a função que relaciona o preço da opção com o preço de exercício ser duas vezes diferenciável em relação ao mesmo. Note-se que não é assumida qualquer hipótese sobre a dinâmica de evolução do preço do activo subjacente nem sobre a distribuição de probabilidade final para o activo subjacente na data de maturidade da opção.

A abordagem de Breeden e Litzenberger (1978) foi desenvolvida recorrendo à teoria dos activos contingentes desenvolvida por Arrow (1964) e Debreu (1959). Para derivar o resultado de que a função de densidade de probabilidade se obtém através da segunda derivada parcial da função de cálculo do preço teórico da opção em relação ao preço de exercício, os autores começaram por assumir a existência de um activo contingente puro cujo valor será uma unidade se o preço do activo subjacente no momento futuro  $T$ ,  $S_T$ , for igual a  $X^*$  e nulo se  $S_T \neq X^*$ .

Designando por  $P(X^*, \tau)$  o valor desse activo contingente em  $t$  (em que  $T-t=\tau$ ) e assumindo uma distribuição de probabilidade neutra ao risco  $q(\cdot)$ ;  $P(X^*, \tau)$  deverá ser

---

<sup>40</sup> Isto significa que não existem, restrições ao “*short-selling*”, custos de transacção ou impostos e os investidores podem contrair empréstimos à taxa de juro sem risco.



igual ao valor esperado do “*payoff*” do activo em  $T$ , actualizado à taxa de juro sem risco do mercado.

Na presença de uma distribuição de probabilidade discreta podemos escrever:

$$P(X^*, \tau) = e^{-r\tau} [prob(S_T = X^*) \times 1 + prob(S_T \neq X^*) \times 0] \quad [3.1]$$

Para o caso contínuo temos:

$$\int_0^{S_T} P(X^*, \tau) = e^{-r\tau} \int_0^{S_T} 1 \times q(X^*) dX^* \quad [3.2]$$

Em que  $q(\cdot)$  é a função de densidade de probabilidade neutra ao risco do activo subjacente, na data da maturidade da opção e  $r$  é a taxa de juro sem risco do mercado, anualizada e com capitalização contínua.

O “*payoff*” gerado pelo activo contingente atrás descrito, é passível de ser replicado através de uma estratégia que consiste na venda de duas opções de compra com preço de exercício igual a  $X^*$  e na aquisição de duas outras opções de compra. Uma com o preço de exercício mais baixo ( $X^* - \Delta S_T$ ) e outra com um preço de exercício mais elevado ( $X^* + \Delta S_T$ ), em que  $\Delta S_T$  traduz a diferença entre dois preços de exercício adjacentes. A carteira construída com base nestas 4 opções é vulgarmente designada por uma estratégia de “*butterfly spread*” centrada em  $S_T = X^*$ . O valor do “*payoff*” associado ao “*butterfly spread*” quando  $S_T = X^*$  pode ser representado por:

$$\left. \frac{[\tilde{c}(X^* + \Delta S_T, \tau) - \tilde{c}(X^*, \tau)] - [\tilde{c}(X^*, \tau) - \tilde{c}(X^* - \Delta S_T, \tau)]}{\Delta S_T} \right|_{X^* = S_T} = 1 \quad [3.3]$$

Em que  $\tilde{c}(X, \tau)$  representa o “*payoff*” de uma opção de compra Europeia com preço de exercício  $X$  e tempo para o vencimento igual a  $\tau$ . À medida que  $\Delta S_T$  tende para zero, a função de “*payoff*” tende para uma função “Delta de Dirac” com a sua massa concentrada em  $S_T = X^*$ , donde no limite a estratégia de “*butterfly spread*” replica um activo contingente do universo Arrow-Debreu, caracterizado pelo pagamento de uma unidade se  $S_T = X^*$  e zero unidades em todas as outras situações<sup>41</sup>.

Partindo da hipótese que a variação preço do activo subjacente é caracterizada por saltos de  $\Delta S$ , a estratégia de “*butterfly spread*” que consiste na aquisição de uma opção de compra com um preço de exercício  $X^* - \Delta S$ , aquisição de opção de compra com preço de

exercício  $X^* + \Delta S$  e venda de duas opções de compra com preço de exercício  $X^*$ , tem uma matriz de “*payoffs*” idêntica à apresentada no quadro 3.1.

**Quadro 3.1:** “*Payoff*” de uma estratégia de “*butterfly spread*” centrada em  $S_T = X^*$ , com um intervalo de variação para os preços possíveis igual a  $\Delta S$

Valores possíveis para $S_T$	"Payoff" resultante da posição longa na call com $X = S_T - \Delta S$	"Payoff" resultante da posição longa na call com $X = S_T + \Delta S$	"Payoff" resultante da posição curta em 2 calls com $X = S_T$	"Payoff" total da estratégia
$\Delta S$	0	0	0	0
$2\Delta S$	0	0	0	0
...	...	...	...	...
$X^* - \Delta S$	0	0	0	0
$X^*$	$\Delta S$	0	0	$\Delta S$
$X^* + \Delta S$	$2\Delta S$	0	$-2^* \Delta S$	0
$X^* + 2\Delta S$	$3\Delta S$	$\Delta S$	$-2^* 2^* \Delta S$	0
...	...	...	...	...
$X^* + n\Delta S$	$(n+1)\Delta S$	$(n-1)\Delta S$	$-2^* n^* \Delta S$	0

Para que o “*payoff*” gerado quando  $S_T = X^*$  seja igual a um, então o número de unidades a comprar do “*butterfly spread*” terá de ser  $1/\Delta S$ . Seja  $P(X^*, \tau, \Delta S)$  o preço do activo contingente puro, no presente, quando o preço do activo subjacente evolui em intervalos de  $\Delta S$ . Uma vez que o “*payoff*” associado às  $1/\Delta S$  unidades do “*butterfly spread*” é exactamente igual ao “*payoff*” do activo contingente puro, então o preço desse activo terá que ser obviamente igual ao preço das  $1/\Delta S$  unidades do “*butterfly spread*”, isto é:

$$P(X^*, \tau, \Delta S) = (1/\Delta S) [c(X^* + \Delta S, \tau) - c(X^*, \tau)] - [c(X^*, \tau) - c(X^* - \Delta S, \tau)] \quad [3.4]$$

ou dividindo ambos os membros por  $\Delta S$ , vem

$$\frac{P(X^*, \tau, \Delta S)}{\Delta S} = \frac{[c(X^* + \Delta S, \tau) - c(X^*, \tau)] - [c(X^*, \tau) - c(X^* - \Delta S, \tau)]}{\Delta S^2} \quad [3.5]$$

Admitindo que existem opções de compra cujo intervalo dos preços de exercício é contínuo e vai de zero a infinito, isto é, que no limite  $\Delta S$  tende para zero, temos então que:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{P(X^*, \tau, \Delta S)}{\Delta S} = \frac{\partial^2 c(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X=X^*} \quad [3.6]$$

<sup>41</sup> Ver, por exemplo, Bahra (1997) páginas 9-10.

Donde, sob a hipótese de existência de intervalos infinitesimais entre os diferentes preços de exercício podemos obter uma função de densidade de probabilidade completa que abrange todos os estados possíveis.

Uma vez que o preço de um activo contingente Arrow-Debreu pode igualmente ser expresso como o valor actualizado do seu “*payoff*” futuro, então tendo em conta a expressão [3.2],

$$\int_0^{S_T} 1 \times q(S_T) dS_T = e^{r\tau} \int_0^{S_T} P(S_T, \tau) = e^{r\tau} \int_0^{S_T} \frac{\partial^2 c(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X=S_T} dS_T \quad [3.7]$$

Derivando ambos os membros da igualdade em ordem a  $S_T$  vem,

$$q(S_T) = e^{r\tau} \frac{\partial^2 c(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X=S_T} \quad \frac{\partial^2 c(X, \tau)}{\partial X^2} = e^{-r\tau} q(S_T) \quad [3.8]$$

Conclui-se assim, que a segunda derivada da função de cálculo do preço teórico de uma opção de compra em relação ao preço de exercício é equivalente à função de densidade de probabilidade, neutra ao risco, do activo subjacente na data da maturidade da opção,  $q(S_T)$ , actualizada pelo factor  $e^{-r\tau}$ , onde  $r$  é a taxa de juro (anualizada) sem risco.

Segundo Bahra (1997), constata-se igualmente que na ausência de oportunidades de arbitragem,  $C(X, \tau)$  é convexa e monótona decrescente com o preço de exercício, o que implica que todas as estratégias de “*butterfly spread*” que possam ser construídas num espaço de estados contínuo têm um valor positivo. Este facto resulta numa função de densidade de probabilidade positiva. Caso existam oportunidades de arbitragem em alguns dos estados, então a esses estados estarão associados valores negativos da função de densidade de probabilidade.

### 3.2 As diferentes metodologias existentes

A abordagem mais simples à estimação da função de densidade de probabilidade para o preço do activo subjacente, na data da maturidade da opção, baseia-se numa aproximação à segunda derivada da função de cálculo do preço teórico de uma opção, em ordem ao preço de exercício, recorrendo aos resultados de Breeden e Litzenberger (1978) e tendo em atenção os preços actuais da opção sobre um conjunto de preços de exercício. Partindo da equação [3.4], que dá o valor de uma estratégia “*butterfly*

*spread*” centrada no estado  $S_T=X^*$ , este valor pode ser capitalizado a taxa de juro sem risco e desse modo dar uma aproximação à probabilidade neutra ao risco de o preço do activo subjacente na data da maturidade da opção ( $S_T$ ) ser igual a  $X^*$  (Bahra, 1997). Podemos então utilizar a expressão [3.9] para calcular essas probabilidades.

$$q(S_T) = e^{r\tau} \frac{[c(X^* + \Delta S, \tau) - c(X^*, \tau)] - [c(X^*, \tau) - c(X^* - \Delta S, \tau)]}{\Delta S} \Big|_{X=X^*} \quad [3.9]$$

Recorrendo-se a esta técnica obtém-se, de uma forma relativamente simples, um histograma que traduz as probabilidades neutras ao risco associadas ao preço do activo subjacente na data de maturidade da opção. Estamos assim, ainda que de um modo grosseiro, na presença de uma função de densidade de probabilidade neutra ao risco discreta.

Porém, este tipo de abordagem possui desvantagens importantes. Primeiro, não permite inferir e caracterizar de uma forma correcta as caudas da função de densidade de probabilidade, nomeadamente, devido ao facto de existir um número limitado de preços de exercício, muito embora, através deste método seja possível saber a massa de probabilidade não caracterizada. Por outro lado, e conforme refere Bahra (1996), a maior desvantagem desta abordagem reside no facto de não existir nada na metodologia que permita ajustar as irregularidades observadas nas funções de cálculo do prémio das opções ou decorrentes da existência de oportunidades de arbitragem, que podem levar a obtenção de probabilidades implícitas negativas.

Neuhaus (1995), propõe a derivação do histograma de probabilidades a partir da estimação da função de distribuição cumulativa discreta do preço do activo subjacente. De acordo com esta abordagem, o histograma traduziria as probabilidades de o preço do activo subjacente na data da maturidade cair entre dois preços de exercício consecutivos e não num determinado intervalo em torno de cada preço de exercício. A expressão utilizada para calcular essa probabilidade é dada por<sup>42</sup>:

$$p(X \leq S_T < X + \Delta X) = e^{r\tau} \frac{[c(X + 2\Delta X, \tau) - c(X + \Delta X, \tau)] - [c(X, \tau) - c(X - \Delta X, \tau)]}{2\Delta X} \quad [3.10]$$

A implementação desta técnica permite obter a probabilidade associada a um preço de exercício entre dois preços adjacentes e a assim sucessivamente. A equação [3.10] foi utilizada, por exemplo, em Nakamura e Shiratsuka (1999) e Manzano e Sanches (1998).

---

<sup>42</sup> Ver, por exemplo, Manzano e Sanches (1998).

Embora a proposta de Neuhaus não permita resolver o problema da caracterização da massa de probabilidade em cada uma das abas da distribuição, permite pelo menos saber qual a massa de probabilidade associada a cada uma delas e eliminar de alguma forma as irregularidades obtidas da utilização da equação [3.9].

Vimos assim que a abordagem às funções de densidade de probabilidade através dos histogramas de probabilidade possui algumas limitações importantes, decorrentes, quer da necessidade de um número elevado de preços de exercício, quer da discricionariedade dos mesmos e do facto de serem facilmente influenciáveis pelas irregularidades patentes na informação utilizada. Estas limitações podem, contudo, ser relativamente superadas através da imposição de uma estrutura *ex-ante* para o problema em causa.

A imposição de hipóteses *à priori* sobre a função de densidade de probabilidade ou sobre o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente permitirá a obtenção de funções de densidade de probabilidade mais suaves, uma vez que o peso atribuído às irregularidades da informação será menor, atribuindo-se sim um maior peso ao formato da função na ausência de oportunidades de arbitragem. Dado que os preços de exercício são observados apenas num intervalo limitado, a imposição de uma estrutura *à priori* permitirá igualmente modelar, de uma alguma forma, as abas da distribuição cujo formato, é totalmente desconhecido à partida.

Uma das soluções consiste em assumir um processo estocástico particular para a dinâmica de evolução do preço do activo subjacente. Em Bates (1996) e Malz (1995), por exemplo, é assumido um processo de salto-difusão. Uma abordagem alternativa consiste em impor uma estrutura para a distribuição futura e não para a dinâmica de evolução do preço do activo subjacente. Melick e Thomas (1997), Bahra (1996, 1997), Leahy e Thomas (1996) e Gemmill e Saflekos (2000) foram alguns dos autores que utilizaram este tipo de abordagem. As abordagens desenvolvidas por Rubinstein (1994) e Jackwerth e Rubinstein (1996), embora ligeiramente diferentes, podem igualmente classificar-se nesta categoria.

Nas próximas secções será feita uma descrição mais pormenorizada de algumas das abordagens alternativas já referidas pretendo-se abordar um método relativo a cada uma das categorias apresentadas na primeira secção deste capítulo. Nesse sentido, serão apresentadas com um maior detalhe as metodologias propostas por Shimko (1993), Melick e Thomas (1997), Rubinstein (1994), Malz (1995) e a abordagem não paramétrica de Aït-Sahalia e Lo (1998).

### **3.2.1 A estimação da FDPNR a partir das volatilidades implícitas: a abordagem de Shimko (1993)**

A metodologia proposta por Shimko (1993) recorre em grande parte à ideia básica de Breeden e Litzenberger (1978), já aqui apresentada, de que a segunda derivada parcial da função de cálculo do preço da opção em relação ao preço de exercício é directamente proporcional à função de densidade de probabilidade final do preço do activo subjacente.

Desta forma, e pelo facto de não assumir qualquer hipótese relativamente à forma paramétrica da função de densidade de probabilidade ou ao processo estocástico seguido pela evolução do preço do activo subjacente, a sua análise reveste-se de algum interesse.

Shimko (1993), propõe uma abordagem assente na extrapolação da função de densidade de probabilidade a partir das volatilidades implícitas em vez da extrapolação a partir do preço das opções. Segundo o autor, as volatilidades implícitas, calculadas com base no modelo de Black-Sholes, são uma função mais suave dos preços de exercício do que os preços das opções, justificando assim o facto de a sua abordagem ser desenvolvida com base nas primeiras. Nesse sentido, o processo de determinação da função de densidade de probabilidade começa com o cálculo das volatilidades implícitas através da utilização invertida da fórmula de Black-Sholes, com base nos preços das opções observados no mercado. Uma vez calculadas as volatilidades implícitas, associadas a cada preço de exercício, estaremos na presença de um conjunto de pontos que permitem calcular uma curva “*smile*” através de um método de interpolação que produza um ajustamento suave.

Shimko (1993), assume neste ponto que a volatilidade implícita é uma função quadrática do preço de exercício para todos os preços de exercício no intervalo entre o menor e o maior preço de exercício negociável. Desta forma estaremos na presença de uma relação funcional em que as volatilidades implícitas são função dos preços de exercício. Através da introdução desta relação funcional na fórmula de valorização de Black-Sholes iremos obter os preços das opções como uma função contínua dos preços de exercício<sup>43</sup>.

---

<sup>43</sup> Apenas no intervalo entre o menor e o maior preço de exercício negociável.

Posteriormente, efectuando a segunda derivada desta função de cálculo de preço da opção, em ordem ao preço de exercício e multiplicando-a por  $e^{r\tau}$ , obtém-se a função de densidade de probabilidade neutra ao risco implícita nos preços das opções, para o intervalo compreendido entre o menor e o maior preço de exercício negociáveis.

No que diz respeito aos preços de exercício excluídos fora do intervalo atrás referido, os quais estão associados as abas esquerda e direita da função de densidade, Shimko propõe uma extrapolação recorrendo a utilização de funções de densidade lognormais, de modo a que a probabilidade cumulativa total seja igual a um e que a função de densidade obtida seja contínua.

Shimko (1993), fez uso desta metodologia para estimar funções de densidade de probabilidade para o índice S&P 100 para várias datas compreendidas entre os anos de 1987 e 1989. Malz (1997a), utiliza uma versão da metodologia proposta por Shimko, recorrendo ao delta da opção em vez do preço de exercício, como variável a utilizar no eixo das abcissas aquando da determinação da curva ajustada do “*volatility smile*”.

A abordagem desenvolvida por Shimko não é, porém isenta de críticas. O procedimento de extrapolação utilizado para completar as abas da distribuição, fora do intervalo entre o maior e o menor preço de exercício, para além de não utilizar a informação contida nos preços das opções, atribui uma estrutura de volatilidade constante à curva “*smile*”, para preços de exercício fora do intervalo negociado, hipótese algo difícil de aceitar, como já vimos anteriormente. Esta hipótese tem igualmente consequências sobre a configuração da distribuição de probabilidade final. Uma vez que a distribuição final resulta da combinação de três componentes distintas é natural que nem sempre se obtenha uma transição suave de uma secção da distribuição para outra.

O facto de assumir que a curva “*smile*” pode ser representada por uma relação quadrática entre a volatilidade implícita e o preço de exercício revela-se, igualmente, uma hipótese bastante restritiva. A realidade mostra, nomeadamente, no mercado de acções, que a curva “*smile*” tende a não apresentar uma forma parabólica para preços de exercício fortemente “*in-the-money*” ou “*out-of-the-money*”. O problema atrás descrito é porém superável através da utilização na interpolação de outro tipo de funções, nomeadamente, hiperbólicas, polinomiais e “*splines*” quadráticos e cúbicos com diferentes números de pontos “*knot*”, conforme o sugerido por Campa, Chang e Reider (1998).

Na maior parte dos casos, segundo Bahra (1997), a adopção de um “*spline*” cúbico com dois pontos “*knot*”, possui uma melhor capacidade de ajustamento que qualquer outra forma funcional.

Note-se que, a escolha da função interpolante se reveste de uma importância extrema, na medida em que determinados “*smile*” estimados podem conduzir a relações côncavas entre os preços das opções e os preços de exercício das quais resultariam probabilidades negativas.

Panigirtzoglou e Bliss (2000), propõem um método de estimação do “*volatily smile*” que combina os aspectos positivos da abordagem de Malz (1997a) e Campa, Chang e Reider (1998), extrapolando-o com base na relação entre a volatilidade e o delta da opção e utilizando posteriormente um “*spline*” natural para o cálculo da função ajustada.

Uma última nota prende-se com a utilização que Shimko faz da fórmula de Black-Sholes. De acordo com Bahra (1997), a utilização que Shimko faz da fórmula não necessita que esta seja válida, na medida em que é apenas utilizada como um instrumento que permite a passagem do domínio dos preços observados das opções para o das volatilidades implícitas, pois de acordo com o autor, as volatilidades implícitas são uma função mais suave dos preços de exercício do que dos preços das opções.

### **3.2.2 A abordagem com base nas árvores binomiais: Rubinstein (1994)**

A metodologia proposta por Rubinstein (1994), insere-se na quarta categoria de métodos apresentada no início deste capítulo. Numa primeira fase, é escolhida uma determinada distribuição candidata a função de densidade de probabilidade, em geral de formato simples. Num segundo passo, a função de densidade de probabilidade é reestimada como sendo a densidade que verifica duas condições: minimiza a distância em relação à densidade estimada na primeira fase e minimiza a distância em relação aos prémios das opções observados no mercado.

Rubinstein (1994), assume que a distribuição candidata a função de densidade de probabilidade é resultado da construção de uma árvore binomial, com  $n$  períodos, o último dos quais coincide com a maturidade da opção, utilizando para tal a média das volatilidades implícitas das duas opções mais próximas de estarem “*at-the-money*”.



Sejam,

- $S_j$  ( $j=0,...,n$ ) : os preços do activo subjacente no final da árvore binomial, estruturados do mais baixo para o mais elevado;
- $P_j$  : as probabilidades neutras ao risco associadas a cada preço  $S_j$ ;
- $S^b$  e  $S^a$  : os preços actuais “*bid*” e “*ask*” do activo subjacente observados no mercado;
- $C_i^b$  e  $C_i^a$ , com  $i=1,...,k$  : os preços actuais “*bid*” e “*ask*” de  $k$  opções de compra observados no mercado;
- $X_i$ , com  $i=1,...,k$ : os preços de exercício das respectivas opções;
- $r$  a taxa de juro sem risco (anualizada) em cada intervalo da árvore binomial;
- $\delta$  a taxa de dividendos (anualizada) do activo em cada intervalo da árvore binomial;

As probabilidades neutras ao risco estimadas,  $\hat{P}_k$ , serão os valores  $P_k$ , que resolvem o seguinte problema de optimização:

$$\text{Min}_{P_k} \sum_{k=0}^n [P_k - P'_k]^2 \quad [3.11]$$

s.a.

$$\sum_{k=0}^n \hat{P}_k = 1 \text{ e } \hat{P}_k \geq 0 \text{ para } k=0,...,n$$

$$S^b \leq S \leq S^a \text{ em que } S = \left( \delta^n \sum_{k=0}^n \hat{P}_k S_k \right) / (1+r)^n$$

$$C_i^b \leq C_i \leq C_i^a \text{ em que } C_i = \left( \sum_{k=0}^n \hat{P}_k \cdot \max[0, S_k - X_i] \right) / (1+r)^n$$

O processo de optimização utilizado leva a que as probabilidades estimadas ( $\hat{P}_k$ ) sejam as probabilidades neutras ao risco mais próximas, no sentido dos mínimos quadrados, das probabilidades lognormais compatíveis com os preços admissíveis (admissíveis porque se situam entre os preços “*bid*” e “*ask*” de mercado) estimados para as opções e activo subjacente.

Jackwerth e Rubinstein (1996), utilizaram o mesmo tipo de abordagem, mas recorrendo a outra função objectivo<sup>44</sup> com o intuito de tentar suavizar a distribuição obtida, uma vez que um dos aspectos negativos apontados a esta abordagem reside no facto de as distribuições obtidas, se revelarem por vezes pouco suaves. A função escolhida pelos autores acaba igualmente com a necessidade de se escolher *à priori* e de uma forma arbitrária uma distribuição candidata a função de densidade de probabilidade.

Porém, este tipo de abordagem parece ter algum potencial, nomeadamente ao nível da flexibilidade, pois para além de permitir utilizar a larga variedade de funções objectivo, é igualmente compatível com outras opções feitas para a distribuição inicial. Jackwerth e Rubinstein (1996) sugerem como outras possibilidades para a função objectivo, a função “bondade do ajustamento” dada por,  $\sum_k (P_k - P'_k)^2 / P'_k$ , a função das diferenças absolutas,  $\sum_k |P_k - P'_k|$  e a função de “máxima entropia”,  $-\sum_k P_k \log(P_k / P'_k)$ .

Contudo, tal como acontece em todos os métodos alternativos, a abordagem proposta por Rubinstein (1994) possui algumas limitações importantes. A primeira reside na quantidade de informação necessária, que em relação a outros métodos é relativamente mais elevada, pois são necessários simultaneamente os preços “*bid*” e “*ask*” de mercado. Uma segunda limitação está associada ao facto de que, na presença de um número de probabilidades superior ao número de opções disponíveis no mercado, então a solução do problema de optimização irá depender da função objectivo e da distribuição escolhida *à priori*. Positivo é o facto de que quanto maior for o número de opções utilizadas, menor será o impacto das probabilidades iniciais sobre as probabilidades finais estimadas. Nesse sentido, se o número de opções tender para infinito então as probabilidades finais estimadas serão independentes da distribuição inicialmente escolhida.

Segundo Jackwerth (1999), o facto de Rubinstein, aquando da construção da árvore, não utilizar os preços das opções que expiram antes da data terminal bem como, o pressuposto da existência de uma trajectória, para as probabilidades, idêntica para todas as trajectórias de evolução do preço do activo subjacente cujo preço final é igual, parece

---

<sup>44</sup> A função objectivo utilizada pelos autores é a seguinte:

$$\sum_{k=0}^n [p_{k-1} - 2p_k + p_{k+1}]^2 \text{ em que } p_{-1}=p_{n+1}=0$$

um pouco arbitrário e restritivo, constituem igualmente limitações importantes desta abordagem.

Derman e Kani (1994), introduzem uma árvore binomial alternativa cuja construção é efectuada para a frente, ao contrário do efectuado por Rubinstein, adicionando-se novos nós para cada novo intervalo temporal, nós esses baseados na informação de um conjunto particular de prémios de opções. Dada a instabilidade numérica observada, em particular quando os intervalos temporais são extensos, Derman, Kani e Chriss (1996) sugerem a utilização de árvores trinomiais em que os graus de liberdade adicionais são utilizados com o objectivo de resolver esse problema.

### **3.2.3 A imposição de uma estrutura *à priori* para a FDPNR terminal: uma mistura de distribuições lognormais, Melick e Thomas (1997)**

O ponto de partida desta metodologia assenta na formulação de hipóteses para a forma funcional da função de densidade de probabilidade final do activo subjacente e na estimação dos parâmetros da mesma através da minimização de uma função de distância entre os preços observados no mercado e os que são gerados através da fórmula paramétrica assumida para a função de densidade de probabilidade.

Melick e Thomas (1997) defendem que este tipo de abordagem é bastante mais flexível do que aquela que assenta na formulação de hipóteses para o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente, na medida em que, a assunção de um determinado processo estocástico para a evolução do preço do activo subjacente implica uma e uma só função de densidade de probabilidade terminal. O contrário porém não se verifica uma vez que uma determinada forma paramétrica para a função de densidade de probabilidade é compatível com uma vasta variedade de processos estocásticos para a evolução do preço do activo subjacente.

Esta metodologia de estimação da FDPNR do activo subjacente insere-se assim no segundo tipo de abordagem referida no início deste capítulo. O método utilizado por Melick e Thomas (1997), como iremos ver mais à frente, possibilita a utilização quer de opções Europeias quer de opções Americanas, no processo de estimação da função de densidade de probabilidade.

Como já foi referido anteriormente<sup>45</sup>, os preços de uma opção de compra (venda) Europeia podem ser representados como sendo o somatório dos “*payoffs*” futuros actualizados. Podemos então escrever:

$$c(X, \tau) = e^{-r\tau} \int_X^{\infty} q(S_T)(S_T - X) dS_T \quad [3.12]$$

$$p(X, \tau) = e^{-r\tau} \int_0^X q(S_T)(X - S_T) dS_T \quad [3.13]$$

em que:

- $S_T$  é o preço do activo subjacente na data da maturidade da opção;
- $X$  é o preço de exercício da opção;
- $T$  é o momento futuro da data de vencimento da opção;
- $r$  é a taxa de juro sem risco;
- $\tau$  o tempo até a maturidade em anos;
- $q(S_T)$  é a função de densidade neutra ao risco para o preço do activo subjacente à data de vencimento.

Conforme é referido por Bahra (1997), em teoria, qualquer forma funcional podia ser utilizada nas equações [3.12] e [3.13] para  $q(S_T)$  e os seus parâmetros estimados através de processos de optimização numérica. Contudo, uma vez que as distribuições observadas dos preços dos activos financeiros são semelhantes à distribuição lognormal, parece aceitável a utilização da abordagem proposta por Ritchey (1990) e assumir que  $q(S_T)$  será a soma ponderada de  $k$  funções de densidade de probabilidade lognormais, isto é:

$$q(S_T) = \sum_{i=1}^k [\theta_i L(\alpha_i, \beta_i, S_T)] \quad [3.14]$$

onde,  $L(\alpha_i, \beta_i, S_T)$  é a  $i$ -ésima função de densidade de probabilidade lognormal expressa pela seguinte fórmula:

$$L(\alpha_i, \beta_i, S_T) = \frac{1}{S_T \beta \sqrt{2\pi}} e^{\left[ -(\ln S_T - \alpha)^2 / 2\beta^2 \right]} \quad [3.15]$$

e  $\theta_i$  é o peso atribuído à respectiva função satisfazendo as condições:

---

<sup>45</sup> Ver secção 1.1.2.

$$\sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i > 0 \text{ para cada } i. \quad [3.16]$$

Melick e Thomas (1997) utilizaram esta metodologia para extrair as funções de densidade de probabilidade neutras ao risco das opções Americanas sobre futuros de petróleo durante a Guerra do Golfo Pérsico. Em particular, os autores assumiram que a função terminal da distribuição do preço do activo subjacente seria a combinação de três funções de distribuição lognormais independentes. A hipótese adoptada revela-se bastante flexível uma vez que possibilita a obtenção de vários formatos para a distribuição de probabilidade terminal, acomodando facilmente distribuições leptocúrticas, assimétricas e multimodais, que poderão traduzir os mais variados cenários. Chama-se a atenção para o facto, de numa situação limite, poder igualmente reproduzir a distribuição lognormal proclamada pelo modelo de Black-Sholes.

### 3.2.3.1 Utilização de opções do tipo Europeu

No caso de estarmos na presença de opções Europeias e sob a hipótese de uma mistura de duas distribuições lognormais a estimação da função de densidade de probabilidade neutra ao risco para o activo subjacente, na data da maturidade da opção, resume-se ao seguinte problema de optimização:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n [\hat{c}(X_i, \tau) - c_i]^2 + \sum_{i=1}^n [\hat{p}(X_i, \tau) - p_i]^2 + \lambda \left[ \theta e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} + (1 - \theta) e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} - e^{r\tau} S \right]^2 \quad [3.17]$$

$$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \theta$$

em que:

$$\bullet \quad \hat{c}(X_i, \tau) = e^{-r\tau} \int_X^\infty [\theta q(\mu_1, \sigma_1, S_T) + (1 - \theta) q(\mu_2, \sigma_2, S_T)] (S_T - X_i) dS_T \quad [3.18]$$

$$\bullet \quad \hat{p}(X_i, \tau) = e^{-r\tau} \int_0^X [\theta q(\mu_1, \sigma_1, S_T) + (1 - \theta) q(\mu_2, \sigma_2, S_T)] (X_i - S_T) dS_T \quad [3.19]$$

- $\hat{c}(X_i, \tau)$  e  $\hat{p}(X_i, \tau)$  são os prémios teóricos das opções de compra e venda para os diferentes preços de exercício  $X_i$  e uma dada maturidade  $\tau$ ,
- $\lambda$  é um coeficiente de penalização,

- $n$  é o número de prémios observados para as opções de compra e opções de venda,
- $c_i$  e  $p_i$  são os prémios das opções de compra e venda observados no mercado para os respectivos preços de exercício,
- $\theta$  e  $(1 - \theta)$  são os pesos atribuídos a cada uma das distribuições lognormais,
- $q(\mu_i, \sigma_i, S_T) = \frac{1}{S_T \sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln S_T - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$  é a função de densidade lognormal

para os prémios da opção de compra e venda, onde os parâmetros  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as médias das distribuições normais correspondentes e  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  são as respectivas variâncias.

Na optimização da função objectivo [3.17], para facilitar os cálculos computacionais Bahra (1997) utilizou as seguintes soluções fechadas<sup>46</sup> para as equações [3.18] e [3.19]:

$$c(X, \tau) = e^{-r\tau} \left\{ \theta \left[ e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} N(d_1) - XN(d_2) \right] + (1 - \theta) \left[ e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} N(d_3) - XN(d_4) \right] \right\} \quad [3.20]$$

$$p(X, \tau) = e^{-r\tau} \left\{ \theta \left[ -e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} N(-d_1) + XN(-d_2) \right] + (1 - \theta) \left[ -e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} N(-d_3) + XN(-d_4) \right] \right\} \quad [3.21]$$

onde,

$$d_1 = \frac{-\ln X + \mu_1 + \sigma_1^2}{\sigma_1}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_1$$

$$d_3 = \frac{-\ln X + \mu_2 + \sigma_2^2}{\sigma_2}, \quad d_4 = d_3 - \sigma_2$$

No que diz respeito à função objectivo [3.17], as duas primeiras parcelas correspondem à soma dos quadrados dos desvios entre os prémios estimados e os prémios observados no mercado, das opções de compra e venda utilizadas na estimação. A terceira parcela traduz o quadrado da diferença entre a média estimada da distribuição e o preço do futuro. Note-se que, do ponto de vista teórico, a média da distribuição deverá igualar o preço do futuro. Assim, o coeficiente  $\lambda > 0$  corresponde a um coeficiente de penalização

---

<sup>46</sup> Ver demonstração Bahra (1997), páginas 50-53.

cuja introdução na função objectivo visa de algum modo evitar o afastamento entre a média da distribuição e o preço do futuro. Se  $\lambda=0$ , a penalização pelo afastamento é nula, enquanto que no caso em que  $\lambda \rightarrow \infty$  estaremos na presença de um problema de optimização condicionada em que se impõe a condição de igualdade entre a média da distribuição e o preço do futuro.

A utilização da função objectivo completa, implica que por vezes este método se revele menos rápido do que outros cujos resultados são sensíveis aos valores de partida. Por vezes utiliza-se uma função objectivo mais curta, a eliminação da terceira parcela, por exemplo, tem a vantagem de permitir considerar desvios entre a média estimada e o valor do futuro como medida do grau de precisão da distribuição estimada.

### 3.2.3.2 Utilização de opções do tipo Americano

Como foi referido anteriormente uma opção do tipo Americano dá ao seu detentor a possibilidade de a exercer em qualquer momento até à data da maturidade. Desta forma os prémios teóricos das opções de compra e venda são função de dois limites: um inferior e outro superior. O limite inferior é igual ao valor de uma opção Europeia, traduzindo a situação extrema de a opção Americana só ser exercida na maturidade. O limite superior está associado ao valor da opção Europeia no caso da maturidade corresponder ao momento presente, traduzindo aquilo que o seu detentor receberia caso exercesse imediatamente o seu direito.

Para fazer face ao problema colocado, na estimação da função de densidade de probabilidade para o activo subjacente, pela possibilidade de exercício antecipado das opções Americanas, Melick e Thomas (1997) derivaram limites para o valor das opções Americanas, como função apenas da função de densidade de probabilidade neutra ao risco do activo subjacente na maturidade, ou seja, para todos os processos estocásticos que impliquem uma dada distribuição de probabilidade para o activo subjacente na maturidade das opções é possível definir limites para o valor da opção expressos em função apenas dessa distribuição.

Os limites para os prémios das opções Americanas de compra e venda, derivados por Melick e Thomas (1997), são os a seguir apresentados:

$$c^u(X_i, \tau, S_i) = \max[E_i(S_T) - X, e^{-r\tau} E_i(\max(0, S_T - X))] \quad [3.22]$$

$$c^l(X_i, \tau, S_i) = \max[E_t(S_T) - X, e^{-r\tau} E_t(\max(0, S_T - X))] \quad [3.23]$$

$$p^u(X_i, \tau, S_i) = \max[X - E_t(S_T), e^{-r\tau} E_t(\max(0, X - S_T))] \quad [3.24]$$

$$p^l(X_i, \tau, S_i) = \max[X - E_t(S_T), e^{-r\tau} E_t(\max(0, X - S_T))] \quad [3.25]$$

onde,

- os índices  $u$  e  $l$  se referem ao limite superior e inferior, respectivamente, para o prémio da opção de compra ou venda;
- $e^{-r\delta}$  e  $e^{-r\tau}$  são os factores de actualização temporais, o primeiro traduzindo o intervalo de tempo mais reduzido de negociação (tendendo para 0 se existir negociação em contínuo) e o último dizendo respeito ao factor de actualização associado à maturidade das opções;
- $E_t(.)$  traduz a expectativa em  $t$  do valor da opção com base numa distribuição de probabilidade neutra ao risco para o activo subjacente  $q(S_T)$ , na data do vencimento do contrato da opção.

Os autores definem ainda o preço de uma opção Americana, como sendo uma média ponderada dos preços limites inferior e superior. O peso associado a cada limite está directamente relacionado com o intervalo temporal necessário para a resolução da incerteza associado ao preço do activo subjacente. Assim, poderão surgir dois tipos de situações. Uma em que os agentes esperam uma rápida resolução da incerteza, no que diz respeito ao preço do activo base. Neste sentido, a maior probabilidade estará associada ao exercício antecipado da opção, decorrendo daí que valor desta estará próximo do limite superior. A situação alternativa verificar-se-á quando o exercício antecipado da opção Americana será menos valorizado e como tal o preço da opção se encontrar próximo do seu limite inferior. De acordo com o que foi apresentado anteriormente, os prémios para opções Americanas podem assim ser traduzidos pelas seguintes expressões:

$$\hat{c}(X_i, \tau) = w_h c^u(X_i, \tau) + (1 - w_h) c^l(X_i, \tau) \quad [3.26]$$

$$\hat{p}(X_i, \tau) = w_h p^u(X_i, \tau) + (1 - w_h) p^l(X_i, \tau) \quad [3.27]$$

onde,



$w_h$  corresponde à velocidade esperada da resolução da incerteza, pertencendo ao intervalo  $[0,1]$ . Por motivos de simplificação considera-se apenas a utilização de dois pesos na estimação. Deste modo,  $w_1$  se a opção estiver “*in-the-money*” e  $w_2$  se a opção estiver “*out-of-the-money*”.

$$c^u(X_i, \tau, S_t) = \max \left[ e^{-r\tau} S_T - X_i, \int_{X_i}^{\infty} (\theta q(\mu_1, \sigma_1, S_T) + (1-\theta)q(\mu_2, \sigma_2, S_T))(S_T - X_i) dS_T \right] \quad [3.28]$$

$$c^l(X_i, \tau, S_t) = \max \left[ e^{-r\tau} S_T - X_i, e^{-r\tau} \int_{X_i}^{\infty} (\theta q(\mu_1, \sigma_1, S_T) + (1-\theta)q(\mu_2, \sigma_2, S_T))(S_T - X_i) dS_T \right] \quad [3.29]$$

$$p^u(X_i, \tau, S_t) = \max \left[ X_i - e^{-r\tau} S_T, \int_{X_i}^{\infty} (\theta q(\mu_1, \sigma_1, S_T) + (1-\theta)q(\mu_2, \sigma_2, S_T))(X_i - S_T) dS_T \right] \quad [3.30]$$

$$p^l(X_i, \tau, S_t) = \max \left[ X_i - e^{-r\tau} S_T, e^{-r\tau} \int_{X_i}^{\infty} (\theta q(\mu_1, \sigma_1, S_T) + (1-\theta)q(\mu_2, \sigma_2, S_T))(X_i - S_T) dS_T \right] \quad [3.31]$$

Na resolução do problema de optimização apresentado pela equação [3.17] do ponto anterior, as equações [3.18] e [3.19] deverão ser então substituídas pelas equações [3.26] e [3.27] desta secção, tendo igualmente em conta a informação fornecida pelas equações [3.28] a [3.31].

Conforme referido por Melick e Thomas (1997), uma última dificuldade no problema de optimização prende-se com a não diferenciabilidade do operador *max* nas equações [3.28] a [3.31]. Segundo os autores, a resolução de problemas de minimização não lineares com restrições, é bastante facilitada quando as derivadas analíticas nos são fornecidas. Assim, os autores decidem substituir o operador *max* nas equações atrás referenciadas pelo a aproximação logística dada por:

$$\max[x, y] \approx \log itmax[x, y] \times x + (1 - \log itmax[x, y]) \times y$$

onde,

$$\log itmax[x, y] \equiv \frac{1}{1 + \exp[-5(x - y)]}$$

Em síntese, a utilização de uma metodologia assente numa mistura de distribuições lognormais, reveste-se de algumas vantagens importantes, nomeadamente ao nível da quantidade de informação requerida, cálculos computacionais exigidos, capacidade de adaptação aos mais variados cenários, dependendo esta última do número de funções de

densidade lognormais a utilizar. Esse número está condicionado, em grande parte, à quantidade de informação existente no mercado. Na maioria dos mercados, o intervalo dos preços de exercício de opções transaccionadas é muito reduzido o que coloca algumas limitações ao número de parâmetros a estimar com base na informação disponível e como tal o número de funções a utilizar na mistura. O facto de esta metodologia permitir a utilização em simultâneo dos preços de opções de compra e venda sem qualquer transformação prévia assume-se, igualmente, como uma vantagem importante.

A utilização de uma mistura duas distribuições lognormais tem sido a forma funcional mais utilizada<sup>47</sup> na medida em que necessita apenas que sejam estimados 5 parâmetros e permite acomodação dos mais variados cenários.

### **3.2.4 A assunção de um determinado processo estocástico para a evolução do preço do activo subjacente: a abordagem de Malz (1995)**

Uma outra abordagem para a estimação da função de densidade de probabilidade consiste na formulação de hipóteses sobre o processo estocástico que governa a evolução do preço do activo subjacente, e a partir dos preços das opções observados no mercado estimar os parâmetros desse processo. Posteriormente, o mesmo pode ser utilizado para extrair a função de densidade de probabilidade implícita nos preços das opções. Sob determinadas hipóteses, para a dinâmica de evolução do preço do activo subjacente, é possível obter a função de densidade de probabilidade como resultado de uma solução fechada<sup>48</sup>.

Malz (1995), estimou as funções de densidade de probabilidade neutras ao risco das taxas de câmbio futuras de algumas das moedas pertencentes ao SME, nomeadamente do Franco francês, da Libra esterlina e do Marco alemão, com vista a obter as probabilidades de um eventual realinhamento das mesmas. No seu estudo assumiu que as taxas de câmbio seguem um processo estocástico de salto-difusão utilizando

---

<sup>47</sup> Ver, por exemplo, Bahra (1996,1997), Mizrach (1996), Leahy e Thomas (1996), Söderlind (1998), Söderlind e Svensson (1998), Gemmill e Saflekos (2000), Bliss e Panigirtzoglou (2000).

<sup>48</sup> Por exemplo, no modelo de Black-Sholes, a assunção de um Movimento Geométrico Browniano com média e variância constantes, para o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente, implica uma função de densidade de probabilidade lognormal.

posteriormente as volatilidades implícitas e os preços dos “*risk reversals*” para estimar os parâmetros do modelo desenvolvido.

O modelo de salto-difusão assumido para o processo estocástico seguido pelas taxas de câmbio utilizado pelo autor é uma versão do modelo de salto-difusão conhecida como distribuição de *Bernoulli*<sup>49</sup>. Esta versão assume que o tamanho do salto é não estocástico e que existe apenas um ou nenhum salto na taxa de câmbio durante a vida da opção. Com base neste tipo de processo, o autor deriva uma forma fechada para os preços das opções como função dos parâmetros do processo. Posteriormente, os parâmetros são estimados com base nas volatilidades implícitas de opções praticamente “*at-the-money*” e nos preços dos “*risk reversals*”. Sob as hipóteses consideradas pelo autor, facilmente se demonstra que a função de densidade de probabilidade obtida neste caso não é mais do que uma função de densidade de probabilidade que resulta da mistura de duas distribuições lognormais, cujos parâmetros são derivados a partir dos parâmetros do processo de salto-difusão.

De acordo com o modelo de Black-Sholes para a valorização de opções sobre divisas, o valor de uma opção de compra é dada por<sup>50</sup>:

$$v(S_t, \tau, X, \sigma, r, r^*) = S_t e^{-r^* \tau} \Phi(d + \sigma \sqrt{\tau}) - X e^{-r \tau} \Phi(d) \quad [3.32]$$

e o valor de uma opção de venda:

$$w(S_t, \tau, X, \sigma, r, r^*) = S_t e^{-r \tau} \Phi(d) - X e^{-r^* \tau} \Phi(-d - \sigma \sqrt{\tau}) \quad [3.33]$$

onde,

- $S_t$  é a taxa de câmbio “*spot*”;
- $S_T$  é a taxa de câmbio em  $T$ ;
- $r$  é a taxa de juro sem risco, doméstica, anualizada e capitalizada continuamente;
- $r^*$  é a taxa de juro sem risco, externa, anualizada e capitalizada continuamente;
- $\sigma$  é a volatilidade da taxa de câmbio;
- $\Phi(.)$  representa a função de probabilidade cumulativa de uma variável normal estandardizada com,

---

<sup>49</sup> Para mais detalhes sobre a versão da distribuição de *Bernoulli* do processo de salto-difusão ver Ball e Torous (1983,1985) e Bates (1988), conforme referido por Bahra (1997) e Malz (1995).

<sup>50</sup> Ver, por exemplo, Hull (1998).

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - r^* + \frac{\sigma^2}{2}\right) \times \tau}{\sigma \times \sqrt{\tau}} \quad [3.34]$$

Na presença de risco de realinhamento e assumindo que o processo estocástico seguido pelas taxas de câmbio das moedas pertencentes ao SME face ao Marco alemão seguem uma versão simplificada do processo salto-difusão, conhecido como versão da distribuição de *Bernoulli*, os preços das opções de compra e de venda são dados, de acordo com estas hipóteses, respectivamente, por:

$$C_b(S_t, \tau; X, \sigma_w, r, r^*, \lambda, k) = (1 - \lambda\tau) \left[ S_t e^{-(r^* + \lambda k)\tau} \Phi(d_0 + \sigma_w \sqrt{\tau}) - X e^{-r\tau} \Phi(d_0) \right] + \lambda\tau \left[ S_t e^{-(r^* + \lambda k)\tau} (1 + k) \Phi(d_0 + \sigma_w \sqrt{\tau}) - X e^{-r\tau} \Phi(d_1) \right] \quad [3.35]$$

$$P_b(S_t, \tau; X, \sigma_w, r, r^*, \lambda, k) = (1 - \lambda\tau) \left[ X e^{-r\tau} \Phi(-d_0) - S_t e^{-(r^* + \lambda k)\tau} \Phi(-d_0 - \sigma_w \sqrt{\tau}) \right] + \lambda\tau \left[ X e^{-r\tau} \Phi(-d_1) - S_t e^{-(r^* + \lambda k)\tau} (1 + k) \Phi(-d_0 - \sigma_w \sqrt{\tau}) \right] \quad [3.36]$$

onde,

- $k$  representa o valor em percentagem do possível salto da taxa de câmbio;
- $\sigma_w$  traduz a volatilidade da componente de difusão do processo estocástico seguido pela taxa de câmbio;
- $\lambda$  é a taxa média de ocorrência de saltos na taxa de câmbio e

$$d_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - r^* - \lambda k - \frac{\sigma_w^2}{2}\right) \times \tau}{\sigma_w \times \sqrt{\tau}} \quad \text{e} \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \ln(1 + k) + \left(r - r^* - \lambda k - \frac{\sigma_w^2}{2}\right) \times \tau}{\sigma_w \times \sqrt{\tau}}$$

Verifica-se assim que o preço de cada opção resulta de uma média ponderada do valor da opção de acordo com o modelo de Black-Sholes para a valorização de divisas, dada a ocorrência de um salto, ponderada pela probabilidade de ocorrência do salto, e o valor da opção de acordo com o modelo de Black-Sholes, caso não se verifique nenhum salto, ponderada pela probabilidade da não ocorrência de nenhum salto.

As opções “*over-the-counter*”<sup>51</sup> e os “*risk reversals*” são cotados em termos de volatilidades implícitas para opções com um determinado delta. Esta situação vai permitir uma simplificação das fórmulas de cálculo dos preços das opções necessárias à

<sup>51</sup> Opções transaccionadas fora de bolsa, no mercado de balcão.

estimação dos parâmetros do salto-difusão dos preços de Black-Sholes. Desta forma não será necessária informação sobre as taxas de câmbio “spot”, taxas de juro domésticas e externas e preços de exercício das opções.

A simplificação a efectuar consistirá na divisão dos preços das opções pelo valor actualizado à taxa de juro doméstica do preço de exercício, obtendo-se dessa forma os preços das opções em percentagem do valor actualizado do preço de exercício.

Temos então que dividindo a equação [3.32] por  $X_t e^{-r\tau}$ , vem

$$\frac{C(S_t, \tau; X, \sigma, r, r^*)}{X_t e^{-r\tau}} = \frac{S_t e^{(r-r^*)\tau}}{X_t} \Phi(d + \sigma) - \Phi(d)$$

definindo,  $R_t \equiv F_{t,t+1} / X$  e  $F_{t,t+1} \equiv S_t e^{r-r^*}$ , em que  $F_{t,t+1}$  é a taxa de câmbio “forward”, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$\frac{C(S_t, \tau; X, \sigma, r, r^*)}{X_t e^{-r\tau}} = R_t \Phi(d + \sigma) - \Phi(d) \quad [3.37]$$

$$\text{onde, } d = \frac{\ln(R_t)}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$$

No caso de um opção de venda, a fórmula simplificada para os preços da opção vem:

$$\frac{P(S_t, \tau; X, \sigma, r, r^*)}{X_t e^{-r\tau}} = \Phi(-d) - \frac{S_t e^{(r-r^*)\tau}}{X_t} \Phi(-d - \sigma) = R_t \Phi(-d) \quad [3.38]$$

As fórmulas dos preços das opções de *Bernoulli* que incorporam o processo de salto-difusão podem ser igualmente simplificadas, recorrendo-se ao mesmo processo de normalização. Assim teremos para a fórmula do preço de uma opção de compra a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} C_b(R_t, \tau; \sigma_w, \lambda, k) &= \frac{C_b(S_t, \tau; X, \sigma_w, r, r^*, \lambda, k)}{X e^{-r\tau}} = \\ &= (1 - \lambda\tau) \frac{C(S_t e^{-\lambda f\tau}, \tau; X, \sigma_w, r, r^*)}{X e^{-r\tau}} + \lambda\tau \frac{C(S_t e^{-\lambda f\tau} (1+k), \tau; X, \sigma_w, r, r^*)}{X e^{-r\tau}} = \\ &= (1 - \lambda\tau) c(R_t e^{-\lambda k\tau}, \tau, \sigma_w) + \lambda\tau c(R_t e^{-\lambda k\tau} (1+k), \tau, \sigma_w) \end{aligned} \quad [3.39]$$

e para a fórmula de uma opção de venda,

$$\begin{aligned}
P_b(R_t, \tau; \sigma_w, \lambda, k) &= \frac{P_b(S_t, \tau; X, \sigma_w, r, r^*, \lambda, k)}{Xe^{-r\tau}} = \\
&= (1 - \lambda\tau) \frac{P(S_t e^{-\lambda f\tau}, \tau; X, \sigma_w, r, r^*)}{Xe^{-r\tau}} + \lambda\tau \frac{P(S_t e^{-\lambda f\tau} (1+k), \tau; X, \sigma_w, r, r^*)}{Xe^{-r\tau}} = [3.40] \\
&= (1 - \lambda\tau) p(R_t e^{-\lambda k\tau}, \tau, \sigma_w) + \lambda\tau p(R_t e^{-\lambda k\tau} (1+k), \tau, \sigma_w)
\end{aligned}$$

A estimação da função de densidade de probabilidade irá resultar da estimação dos três parâmetros  $\sigma_w$ ,  $\lambda$ , e  $k$  da fórmula do salto-difusão assumido para as taxas de câmbio.

O autor começa por calcular os preços das opções, das volatilidades e dos preços dos “*risk reversals*”, expressos em volatilidades. Uma vez que o preço de um “*risk reversal*” pode ser expresso como resultado da diferença de volatilidades implícitas entre uma opção de compra e uma opção de venda com o mesmo delta em valor absoluto, assumindo-se uma hipótese acerca dos moldes como as volatilidades implícitas das opções de compra e de venda se distribuem em torno da volatilidade das opções “*at-the-money*” podem obter-se as volatilidades implícitas das opções de compra e venda com delta igual a 0.25 e -0.25, respectivamente.

As equações utilizadas para esse cálculo podem ser as abaixo expostas, existindo porém a necessidade de escolher um  $\alpha$  entre 0 e 1<sup>52</sup>:

$$\sigma_t^{call0.25\delta} = \sigma_t^{at-the-money} + \alpha \times rr_t^{0.25\delta} \quad [3.41]$$

$$\sigma_t^{put-0.25\delta} = \sigma_t^{at-the-money} + (1 - \alpha) \times rr_t^{0.25\delta} \quad [3.42]$$

onde,

- $\sigma_t^{call0.25\delta}$  e  $\sigma_t^{put-0.25\delta}$  são as volatilidades implícitas no momento  $t$  das opções de compra e venda, respectivamente, com um valor absoluto do delta igual a 0.25;
- $\sigma_t^{at-the-money}$  é a volatilidade implícita no momento  $t$  das opções “*at-the-money*”, que se assume ser igual à volatilidade das opções de compra com delta igual a 0.50;
- $rr_t^{0.25\delta}$  é o preço do “*risk reversal*” expresso em volatilidades, associado a opções com um valor absoluto para o delta igual a 0.25.

---

<sup>52</sup> Malz (1995), utiliza um  $\alpha$  igual a 0.75. O autor afirma que a estimação dos parâmetros não é muito sensível a alterações do valor de  $\alpha$ .

Depois de obtidas as volatilidades implícitas é calculado o rácio  $R_t$ , a taxa de câmbio “forward” sobre o preço de exercício, consistente com um valor do delta para as opções igual 0.25, 0.50 ou 0.75. A determinação deste rácio é feita mediante a introdução das volatilidades obtidas, nas equações que definem o delta de uma opção de compra e venda (abaixo apresentadas). Note-se que o rácio é definido implicitamente pelas equações em causa.

$$\delta_C(S_t, \tau; X, \sigma, r, r^*) \equiv \frac{\delta C(\cdot, \cdot)}{\delta S_t} = e^{-r^* \tau} \Phi(d + \sigma \sqrt{\tau}) \quad [3.43]$$

$$\delta_P(S_t, \tau; X, \sigma, r, r^*) \equiv \frac{\delta P(\cdot, \cdot)}{\delta S_t} = 1 - \delta_C(S_t, \tau; X, \sigma, r, r^*) \quad [3.44]$$

Uma vez que já dispomos das volatilidades implícitas e do rácio  $R_t$ , podemos transformar as volatilidades em preços das opções, através da introdução destes valores nas equações [3.37] e [3.38]. Desta forma vamos obter os preços de mercado das opções em percentagem do preço de exercício.

A estimação da função de densidade de probabilidade resulta da estimação de três parâmetros  $\sigma_w$ ,  $\lambda$ , e  $k$  da fórmula do salto-difusão assumido para as taxas de câmbio. A estimação é efectuada de modo a que os preços estimados para as opções, expressos em percentagem do valor actualizado do preço de exercício, estejam o mais próximo possível dos preços de mercado observados para as opções. Pretende-se assim minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os preços ajustados e os observados no mercado.

O problema de optimização para  $\sigma_w, \lambda, k$  é então descrito da seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^3 [u_t^i]^2$$

em que,

$$C(R_t^{0.25\delta}, \sigma_t^{0.25\delta}) = c_b(R_t^{0.25\delta}, \sigma_w, \lambda_t, k_t) + u_t^1$$

$$C(R_t^{0.50\delta}, \sigma_t^{0.50\delta}) = c_b(R_t^{0.50\delta}, \sigma_w, \lambda_t, k_t) + u_t^2$$

$$P(R_t^{0.75\delta}, \sigma_t^{0.75\delta}) = p_b(R_t^{0.75\delta}, \sigma_w, \lambda_t, k_t) + u_t^3$$

onde,  $R^{\delta}$  se refere ao rácio da taxa “forward” / preço de exercício, correspondente a uma opção com delta igual a  $x$ , e  $\sigma_t^{0.25\delta}$ ,  $\sigma_t^{0.50\delta}$  e  $\sigma_t^{0.75\delta}$ , se referem às volatilidades implícitas observadas associadas a uma opção de compra com delta igual a 0.25, a uma opção de compra com delta igual a 0.50 e a uma opção de venda com delta igual a 0.75, respectivamente.

Dada a dificuldade em estimar os três parâmetros decorrente da reduzida quantidade de informação disponível, Malz assume um valor para  $\sigma_w$  e estima apenas os parâmetros  $\lambda$  e  $k$ . Segundo o autor, para valores reduzidos de  $\sigma_w$  os resultados da estimação não são significativamente afectados. Porém, na presença de valores elevados de  $\sigma_w$  as estimativas para  $\lambda$  são de alguma forma menores.

No que diz respeito à fórmula da função de densidade de probabilidade terminal da taxa de câmbio, e dada a hipótese de que a taxa de câmbio segue uma versão da distribuição de *Bernoulli*, ela não será mais do que uma mistura de duas distribuições lognormais,  $q_1(\cdot)$  e  $q_2(\cdot)$ , dada por:

$$q(S_T) = \hat{\lambda} \tau q_1(S_T) + (1 - \hat{\lambda} \tau) q_2(S_T) \quad [3.45]$$

em que,

$$q_1(S_T) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi} \hat{\sigma}_w \sqrt{\tau}} \exp \left[ - \left( \frac{\ln(S_T/S_t) - \ln(1 + \hat{k}) - (r - r^* - \hat{\lambda} \hat{k} - \hat{\sigma}_w^2 / 2) \tau}{\hat{\sigma}_w \sqrt{\tau}} \right)^2 / 2 \right]$$

e,

$$q_2(S_T) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi} \hat{\sigma}_w \sqrt{\tau}} \exp \left[ - \left( \frac{\ln(S_T/S_t) - (r - r^* - \hat{\lambda} \hat{k} - \hat{\sigma}_w^2 / 2) \tau}{\hat{\sigma}_w \sqrt{\tau}} \right)^2 / 2 \right]$$



### 3.2.5 A estimação da FDPNR sem restrições: a abordagem não paramétrica e a metodologia de Aït-Sahalia e Lo (1998)

Esta secção aborda sumariamente as metodologias de estimação da FDPNR que seguem uma abordagem não paramétrica. Como já foi referido anteriormente, classificam-se neste tipo de abordagem todos os métodos em que, para a estimação da função de densidade de probabilidade, não são colocadas quaisquer restrições paramétricas sobre os parâmetros ou a forma funcional da mesma, sobre a dinâmica seguida pelo preço do activo subjacente ou sobre a função de cálculo do prémio da opção ou volatilidade implícita. Jackwerth (1999) propõe uma divisão das diferentes metodologias pertencentes à abordagem não paramétrica em três classes.

A primeira engloba os chamados métodos de “*kernel*”, baseados em regressões que pretendem ajustar uma função não paramétrica à informação disponível no mercado e depois, com base nos resultados de Breeden e Litzenberger, derivar a função de densidade de probabilidade. Esta classe engloba a abordagem de Aït-Sahalia e Lo (1998) que veremos, mais à frente, de uma forma detalhada.

A segunda classe abrange os métodos baseados no princípio da máxima entropia. Estas técnicas pretendem estimar uma distribuição de probabilidade não paramétrica, tão próxima quanto possível, em termos de conteúdo informacional, de uma função proposta *à priori*, mas satisfazendo determinadas restrições tal como, por exemplo, cotar de uma forma correcta os preços observados das opções. Estes métodos procuram, na medida do possível, minimizar os efeitos negativos da deficiente qualidade da informação existente ou mesmo da inexistência desta. Consistem, de uma forma sintética, na escolha *à priori* de uma distribuição,  $O_i$ , sendo que a distribuição de probabilidade risco-neutral,  $P_i$ , é calculada posteriormente através da maximização da entropia entre as duas distribuições dada por:

$$-\sum_i P_i \ln(P_i / O_i) \quad [3.46]$$

sujeita a restrições como, as probabilidades obtidas serem positivas, a soma das mesmas ser igual a um e cotar de uma forma correcta os preços das opções<sup>53</sup>. Buchen e Kelly (1996) utilizam, por exemplo, como distribuições propostas *à priori*, a distribuição

---

<sup>53</sup> É efectuada uma apresentação detalhada desta metodologia em Coutant, Jondeau e Rockinger (2001) e McManus (1999).

uniforme e a distribuição lognormal. No caso da utilização da distribuição uniforme, a expressão [3.46] reduz-se a:

$$-\sum_i P_i \ln P_i \quad [3.47]$$

Os mesmos autores demonstram que recorrendo à técnica da máxima entropia, a função de densidade de probabilidade neutra ao risco é igual a:

$$q(X) = \exp\left(\sum_{i=0}^m \lambda_i C_i(X)\right) / \int_0^{+\infty} \exp\left(\sum_{i=0}^m \lambda_i C_i(X)\right) dX \quad [3.48]$$

onde, os  $C_i$  representam os prémios das opções,  $X$  os respectivos preços de exercício e  $\lambda_i$  os multiplicadores que decorrem da maximização do Hamiltoneano, utilizado na maximização da entropia definida pela expressão [3.49].

$$E = - \int_0^{+\infty} q(X) \ln(q(X)) dX \quad [3.49]$$

s.a.

$$\int_0^{+\infty} q(X) dX = 1 \quad [3.50]$$

$$\int_0^{+\infty} C_i(X) q(X) dX = C_i / B(t, T) \quad i=1, \dots, m \quad [3.51]$$

$$\int_0^{+\infty} X q(X) dX = F_t \quad [3.52]$$

onde, a equação [3.50] assegura que  $q(X)$  seja uma função de densidade, [3.51] relaciona a FDPNR com a  $i$ -ésima opção, com  $B(t, T)$  o factor de actualização estocástico intertemporal, e [3.52] representa a restrição de martingale, em que  $F_t$  é o valor esperado em  $t$  para o activo subjacente em  $T$ .

A terceira e última classe de metodologias define os métodos que procuram ajustar da melhor forma as volatilidades implícitas ou as probabilidades neutras ao risco a uma função tão flexível quanto possível através da minimização da soma dos quadrados dos resíduos entre os preços das opções observados e os preços das opções gerados pela função ajustada. Segundo esta classificação, as metodologias propostas por Shimko (1993) e Rubinstein (1994) já apresentadas no ponto 3.2.1 e 3.2.2, respectivamente, pertenceriam a esta categoria.

Vamos, porém, centrar a nossa exposição numa das metodologias mais populares que seguem a abordagem não paramétrica, a regressão de “*kernel*” utilizada por Aït-Sahalia e Lo (1998). Na sua abordagem, os autores utilizam o estimador não paramétrico de Nardaraya-Watson para estimar a forma funcional que relaciona o preço de uma opção de compra com o seu preço de exercício. Depois de obtida esta relação, a mesma é diferenciada duas vezes em relação ao preço de exercício, conforme o sugerido por Breeden e Litzenberger (1978), sendo obtida desta forma uma estimativa para a função de densidade de probabilidade.

Um aspecto importante da metodologia de Aït-Sahalia e Lo, é o facto de a função de densidade de probabilidade não ser estimada com base em informação de um dia em particular, mas sim com base na informação relativa a um determinado período temporal. Mais especificamente, Aït-Sahalia e Lo, agregaram milhares de preços de opções transaccionadas durante o período de um ano e estimaram uma função fixa, dependente de determinados parâmetros  $S_{t_i}, X_i, \tau_i, r_{t_i, \tau_i}, \delta_{t_i, \tau_i}$  (preço do activo subjacente, preço de exercício, tempo para a maturidade, taxa de juro sem risco, nível actual do índice) que melhor explicam a variação nos preços das opções. Segundo os autores, a opção pela estimação da FDPNR recorrendo a abordagens paramétricas parece ser a opção mais correcta quando é conhecido que o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente satisfaz determinadas hipóteses paramétricas como, por exemplo, evoluir de acordo com um Movimento Geométrico Browniano. Porém, recentemente, começaram a levantar-se algumas dúvidas sobre as especificações paramétricas mais populares<sup>54</sup>, situação que leva a que as abordagens não paramétricas se afirmem como importantes alternativas aos métodos mais tradicionais.

Segundo os autores, este tipo de abordagem tem duas vantagens importantes. Em primeiro lugar possibilita o uso de inferência estatística assintótica. Em segundo lugar, permite igualmente a utilização da informação existente de uma forma mais eficiente, na medida em que, atribui um maior peso às características empíricas da informação.

Contudo, este tipo de abordagem possui igualmente algumas desvantagens importantes. Por exemplo, a grande quantidade de informação exigida leva a que o método seja de difícil aplicação. Por outro lado, constata-se que em determinadas datas a função de densidade de probabilidade estimada difere consideravelmente das funções de

---

<sup>54</sup> Ver, por exemplo, Campbell, Lo, e Mackinlay (1997), conforme referido por Aït-Sahalia e Lo (1998).

densidade de probabilidade estimadas através da imposição de restrições paramétricas, nessas situações, os preços previstos das opções são largamente inconsistentes com os preços observados no mercado.

De uma forma sintética, o método proposto pelos autores consiste, com base num conjunto de preços históricos para as opções  $\{H_i\}$  e com base num conjunto de informação que determine de algum modo o preços das mesmas  $\{Z_i \equiv [S_{t_i}, X_i, \tau_i, r_{t_i, \tau_i}, \delta_{t_i, \tau_i}] \}$ , estimar uma função  $H(\cdot)$ , e não um conjunto de parâmetros, que seja tão próxima quanto possível de  $\{H_i\}$ , utilizando como medida de proximidade o método dos mínimos quadrados:

$$\min_{H(\cdot) \in \Gamma} \sum_{i=1}^n [H_i - H(Z_i)]^2 \quad [3.53]$$

em que,  $\Gamma$  representa o espaço das funções contínuas duas vezes diferenciáveis. A solução para este problema é dada pela expectativa condicional de  $H$  em  $Z$ . Para estimar esta expectativa os autores fazem então uso de uma técnica estatística conhecida por regressão de “kernel” não paramétrica. Esta técnica permite obter um estimador para a expectativa condicional de  $H$  em  $Z$ , sem que seja necessário que a função  $H(\cdot)$  seja parametrizada por um número finito de parâmetros, daqui resulta o termo de abordagem não paramétrica. Aït-Sahalia e Lo utilizam então o estimador “kernel” de Nardaraya-Watson [3.54] para determinar a estimativa para a expectativa condicional de  $H$  em  $Z$ .

$$\hat{H}(Z) = \hat{E}[H|Z] = \frac{\sum_{i=1}^n K((Z - Z_i)/h) H_i}{\sum_{i=1}^n K((Z - Z_i)/h)} \quad [3.54]$$

Em que  $K(\cdot)$  é uma função ponderadora ou de “kernel”, a cinco dimensões uma vez que existem cinco variáveis explicativas e  $h$  é um ponderador que se aproxima de zero à medida que a dimensão da amostra  $n$  aumenta.

Intuitivamente, constata-se que a estimativa da expectativa condicional no ponto  $Z$ , isto é, o preço da opção com as características  $Z$ , é dado por uma média ponderada dos preços observados  $H_i$  em que é dado um maior peso às opções cujas características  $Z_i$  estão mais próximas das características  $Z$  da opção cujo preço está a ser estimado. Verifica-se que à medida que  $h$  se aproxima de zero, aumenta o peso dado às realizações  $Z_i$  que estão mais próximas de  $Z$ .

Depois de obtida a estimativa para a função que estabelece a relação entre o preço de uma opção e o preço de exercício, obtém-se a FDPNR implícita nos preços das opções através da aplicação directa do resultado de Breeden e Litzenberger (1978). Neste sentido, calcula-se a segunda derivada parcial da função obtida em relação ao preço de exercício, obtendo-se assim a FDPNR.

### **3.3. Análise comparativa das diferentes metodologias apresentadas e algumas limitações gerais**

Já anteriormente foi chamada a atenção para a grande variedade de métodos que existem no âmbito da estimação das funções de densidade de probabilidade implícitas nos preços das opções. Dada essa situação, muitos autores procuraram nos últimos anos efectuar estudos cujos objectivos se centraram em saber qual o melhor método a utilizar na estimação das funções de densidade de probabilidade implícitas nos preços das opções.

Campa, Chang e Reider (1998)<sup>55</sup> compararam uma versão modificada do método de Shimko (1993) e as técnicas propostas por Rubinstein (1994) e Melick e Thomas (1997) utilizando informação relativa ao mercado de cambial. Concluíram que os três métodos produzem funções de densidade de probabilidade bastante similares, tendo cada uma das abordagens os seus pontos fortes e fracos.

McManus (1999), efectuou um estudo onde avaliou 6 técnicas de estimação de funções de densidade de probabilidade e algumas das estatísticas utilizadas para a interpretação da informação a elas inerente. Os resultados a que chegou parecem evidenciar uma clara supremacia da utilização de uma mistura de duas funções de densidade lognormais face às outras metodologias testadas (utilização do modelo Black-Sholes simples, extensões do modelo Black-Sholes, quer assumindo um processo salto-difusão para a evolução do preço do activo subjacente, quer o recurso à aproximação polinomial de Hermite<sup>56</sup> de ordem 4 e 6, e o recurso ao método da máxima entropia).

Gemmill e Saflekos (2000), compararam a estimação de funções de densidade de probabilidade recorrendo ao método da mistura de duas funções lognormais com o

---

<sup>55</sup> Conforme referido por Bliss e Panigirtzoglou (2000).

<sup>56</sup> Para uma explicação sobre a aproximação polinomial de Hermite, consultar, por exemplo, Coutant, Jondeau e Rockinger (2001) ou McManus (1999).

método que recorre a utilização de apenas uma função lognormal. Concluíram que o primeiro evidencia melhores resultados que o segundo ao nível do ajustamento aos verdadeiros preços observados, mas é apenas marginalmente superior quando estamos no campo da previsão de preços “*out-of-sample*”.

Bahra (1997), num estudo em que utiliza preços de opções (FTSE 100, Euromark, Long Gilt, Bund e Short-Sterling ) transaccionados na LIFFE, implementa as metodologias de Shimko (1993), Melick e Thomas (1997) assim como a abordagem mais simples que recorre a estratégia de “*butterfly spread*” para calcular os histogramas das probabilidades neutras ao risco. Embora o autor não faça uma análise comparativa directa aos métodos apresentados, mostra a sua clara preferência pela utilização de uma mistura de duas distribuições lognormais.

Hördall (2000), compara as FDPNR implícitas, derivadas da utilização de uma mistura de duas distribuições lognormais, com as FDPNR resultantes da utilização do modelo de Longstaff-Schwartz<sup>57</sup>. As FDPNR obtidas através das duas metodologias parecem ser similares podendo, no entanto, utilizar-se o modelo de Longstaff-Schwartz para o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente quando não existe informação sobre essas opções.

Jondeau e Rockinger (1998)<sup>58</sup>, compararam para além de outras técnicas, a técnica de Melick e Thomas (1997) face à metodologia de Malz (1995) que assenta na formulação de hipóteses sobre o processo estocástico que governa a evolução do preço do activo subjacente. No estudo é utilizada informação sobre o mercado cambial “*over-the-counter*” para opções sobre a taxa de câmbio do Franco francês face ao Marco alemão. Os autores concluem que a qualidade do ajustamento providenciado pela abordagem de Melick e Thomas é muito boa, contudo preferem a utilização da abordagem que assenta no processo estocástico de Malz (1995) alegando uma maior facilidade de interpretação. Os autores comparam ainda a utilização de uma distribuição lognormal, com uma mistura de distribuições lognormais, uma aproximação polinomial de Hermite de ordem 4, uma expansão de série de Edgeworth, um modelo de salto-difusão e um modelo de volatilidade estocástica. Os autores concluem que a mistura de distribuições lognormais oferece melhores resultados que os restantes modelos para opções com uma maturidade reduzida, enquanto que o modelo de

---

<sup>57</sup> Para detalhes sobre o modelo de Longstaff-Schwartz, consultar Hördall (2000).

<sup>58</sup> Conforme referido por Jackwerth (1999).

salto-difusão providencia melhores resultados para opções com maturidades mais longas.

Embora a metodologia proposta por Melick e Thomas (1997) com base no trabalho de Ritchey (1990) reúna as preferências de muitos autores e especialistas na matéria, a verdade é que não se pode afirmar univocamente que este é o melhor método para estimar funções de densidade de probabilidade implícitas nos preços das opções.

A melhor ou menor adequação de uma metodologia à estimação da função de densidade de probabilidade implícita depende, em grande parte, das características próprias do activo subjacente, nomeadamente do processo estocástico que governa a evolução do preço do mesmo. A opção por um método cujo fundamento se centre na assunção de uma determinada forma funcional paramétrica para a função de densidade de probabilidade do activo subjacente, na data da maturidade da opção, dispõe de algumas vantagens relativamente aos métodos em que são formuladas hipóteses para o processo estocástico. Assim, a escolha de uma forma paramétrica relativamente flexível permite a acomodação de uma grande variedade de formatos para a função de densidade terminal, possibilitando a representação dos mais variados cenários. O facto de ser uma abordagem relativamente directa e geral, conjuntamente com facto de os cálculos computacionais exigidos e a informação requerida estar dentro dos limites do aceitável, são outras das características que levam este tipo de abordagem a ser preferida por muitos investigadores. Note-se, e como já foi referido anteriormente, de acordo com Melick e Thomas (1997), a abordagem que consiste na formulação de hipóteses para a forma paramétrica da função de densidade de probabilidade terminal é muito mais geral do que a abordagem que assenta na formulação de hipóteses sobre o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente. Esta observação decorre do facto de que, a assunção de uma determinada estrutura funcional para a função de densidade de probabilidade ser compatível com uma larga variedade de processos estocásticos para a evolução do preço do activo subjacente, enquanto que a assunção de um determinado processo é apenas consistente com uma distribuição de probabilidade terminal.

No entanto, este tipo de abordagem possui algumas desvantagens. A primeira deriva do facto deste tipo de metodologia não nos fornecer qualquer tipo de informação sobre a dinâmica de evolução do preço do activo subjacente antes da data da maturidade. Neste contexto, só nos é dada a percepção que o mercado tem num momento específico do

tempo, relativamente a outro ponto específico no futuro. Porém, é possível construir um processo consistente com a distribuição terminal, através da utilização, por exemplo, de uma árvore binomial<sup>59</sup>. A consequência dessa ausência de informação resulta na impossibilidade de replicar a opção ou de utilizar as propriedades “*time-series*” do preço do activo subjacente na avaliação posterior do método. Outra propriedade indesejada deste tipo de abordagem prende-se com a possibilidade de as FDPNR obtidas poderem apresentar “picos” acentuados, situação que ocorre em particular aquando da utilização de uma mistura de distribuições lognormais, em que uma das distribuições estimadas apresenta um desvio padrão reduzido.

Até aqui debruçamo-nos apenas sobre os métodos que assentam na formulação de hipóteses ou para a forma funcional paramétrica da função de densidade de probabilidade terminal ou para o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente, contudo existem metodologias que não formulam hipóteses nem para um nem para outro aspecto, caso dos métodos não paramétricos puros, como o utilizado por Aït-Sahalia e Lo (1998), ou a abordagem de Shimko (1993) que resulta numa aplicação quase directa dos resultados de Breeden e Litzenberger (1978).

Estas duas metodologias parecem ser mais gerais, apresentando desse modo um potencial aparentemente mais elevado face a outras já aqui referidas, dada a ausência de restrições sobre a forma paramétrica da função de densidade ou sobre o processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente. Contudo, as mesmas possuem igualmente algumas limitações importantes, como já vimos anteriormente. No caso das abordagens não paramétricas puras, a grande quantidade de informação e cálculos matemáticos requeridos, assumem-se como as principais desvantagens, sendo também observada com alguma frequência uma larga inconsistência entre os valores gerados pelas metodologias para os preços das opções e aqueles que são observados no mercado.

Independentemente do método utilizado para a estimação das funções de densidade de probabilidade, e por mais sofisticado que seja, existem limitações comuns a todas as metodologias. Essas limitações decorrem em grande parte da quantidade, qualidade e tipo de informação disponível no mercado, mas também e como já foi referido no capítulo 2, do facto de estarmos a estimar uma distribuição neutra ao risco, que difere da distribuição subjectiva dos agentes económicos, pois incorpora as preferências dos agentes face ao risco. Note-se que, mesmo que os agentes fossem neutros ao risco, a

---

<sup>59</sup> À semelhança do que faz Rubinstein (1994), Jackwerth e Rubinstein (1996).



distribuição estimada poderia diferir da verdadeira distribuição, porque nada nos diz que os agentes na formulação das suas expectativas utilizem toda a informação disponível no mercado da forma mais eficiente. Contudo, é sempre possível avaliar em que medida a distribuição estimada difere da verdadeira, podendo no caso de desvios elevados utilizar-se uma função de calibragem que permita a aproximação à última.

No que diz respeito às limitações relativas à informação disponível, a primeira prende-se com a existência de um número finito de preços de opções para utilizar na estimação da função de densidade. Esta situação leva ao problema estatístico das distribuições “empiricamente equivalentes”, que se traduz no facto de, para qualquer distribuição estimada, ser possível construir uma distribuição que produza os mesmos valores previstos para os preços das opções. No entanto, para além do menor e maior preço de exercício observado o formato da distribuição pode ser completamente diferente. Neste sentido, a interpretação dos resultados dados acima do maior preço de exercício e abaixo do menor preço de exercício observado deve ser feita com algum cuidado.

Segundo Bodarenko (2000), quanto maiores são as maturidades das opções utilizadas, menor é a informação disponível sobre as caudas da distribuição e neste sentido maior é o nosso problema e incerteza. Outra limitação importante está associada ao facto de que, os preços de exercício serem fixados em intervalos discretos. De acordo com o autor, alguns detalhes da função de densidade de probabilidade não podem ser inferidos a partir de um conjunto discreto de preços de exercício. Contudo, Bodarenko afirma que esses detalhes não são particularmente importantes e que, para o intervalo entre o menor e maior preço de exercício observado, alguns dos métodos existentes produzem estimativas bastante fiáveis, sendo tanto melhores essas estimativas quanto menor for o intervalo de variação dos preços de exercício.

#### **4. Aplicação prática e interpretação da informação extraída da estimação de funções de densidade de probabilidade neutras ao risco para as taxas de juro de curto prazo da área do Euro**

Neste último capítulo é feita uma aplicação empírica de alguns dos métodos expostos no capítulo anterior com vista à estimação das funções de densidade de probabilidade neutras das taxas de juro de curto prazo da Zona Euro. As metodologias a utilizar consistem na estimação das FDPNR a partir da determinação dos histogramas de probabilidade, recorrendo a utilização de uma distribuição lognormal e com base numa combinação de duas e de três de distribuições lognormais. Serão utilizados na estimação os preços das opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses negociadas na LIFFE.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira secção procede-se a uma caracterização do instrumento em causa. Posteriormente, é apresentado de uma forma sucinta o tipo de informação utilizada na estimação das FDPNR, assim como, as principais medidas de carácter estatístico que permitirão interpretar, os resultados obtidos. Segue-se um exemplo da estimação das FDPNR recorrendo-se, numa primeira fase, à utilização da abordagem assente nos histogramas de probabilidade e posteriormente, à utilização de uma distribuição lognormal e de uma combinação de duas e de três distribuições lognormais. Com base na estimação de FDPNR para diferentes datas pretende-se analisar em que medida a informação contida nos prémios das opções permite antecipar alterações nas taxas de juro de curto prazo na Zona Euro e quais as consequências dessas eventuais alterações nas expectativas dos agentes. Procurou-se igualmente analisar o impacto nas expectativas dos agentes, em termos das taxas de juro de curto prazo, dos acontecimentos ocorridos nos Estados Unidos, em 11 de Setembro de 2001.

Todas as análises e interpretações desenvolvidas foram efectuadas tendo em conta uma limitação que deriva do facto de que, uma vez que a data de vencimento das opções é fixa, se verifica a existência de uma diminuição natural da dispersão das distribuições, à medida que a data de vencimento se aproxima, sendo necessário corrigir as distribuições estimadas tendo em conta este efeito “tempo”. Procurar-se-á assim, identificar na secção 4.7 evidência empírica deste resultado teórico bem conhecido, neste tipo de opções. No entanto, verifica-se que se a comparação da FDPNR estimadas for efectuada entre duas datas relativamente próximas, a correcção a realizar será irrelevante, podendo ser

omitida. Dado que nas nossas análises o intervalo, compreendido entre as datas que serão alvo de comparação, não supera as duas semanas, não será efectuada qualquer correcção às distribuições estimadas.

#### 4.1 Opções sobre futuros de taxa de juro

As opções sobre futuros de taxa de juro têm como activo subjacente um contrato de futuros de taxa de juro que em geral se vence imediatamente após o vencimento da opção ou em alguns casos em simultâneo. Estas opções são normalmente transaccionadas nos mesmos mercados em que se negociam os contratos de futuros subjacentes e, tratando-se de opções convencionais, implicam o pagamento de um prémio pelo comprador, no momento da aquisição da opção.

Nesse sentido, uma opção de compra sobre um contrato de futuros confere ao seu comprador, em contrapartida do pagamento de um prémio, o direito de tomar uma posição longa no contrato de futuros subjacente, a um preço pré-determinado *à priori*. O detentor de uma opção de compra sobre um contrato de futuros tem assim um “*payoff*” tanto mais positivo quanto maior for o preço do futuro subjacente, em relação ao preço de exercício, na data de exercício da opção.

Uma opção de venda sobre um contrato de futuros, por seu lado, confere ao seu comprador, em contrapartida do pagamento de um prémio, o direito a tomar uma posição curta no contrato de futuros subjacente a um preço de exercício pré-determinado. O detentor de uma opção de venda sobre um contrato de futuros terá um “*payoff*” tanto mais positivo, quanto menor for o preço do futuro em relação ao preço de exercício na data de exercício da opção.

No quadro 4.1 podemos observar as diferentes posições num contrato de futuros, resultantes do exercício de uma opção sobre o mesmo.

**Quadro 4.1-** Posição no contrato de Futuros depois do exercício da opção

	<i>Opção de Compra</i>	<i>Opção de Venda</i>
<i>Posição do comprador</i>	Longa nos futuros	Curta nos futuros
<i>Posição do vendedor</i>	Curta nos futuros	Longa nos futuros

Os contratos de futuros sobre taxas de juro são cotados como sendo 100 menos a taxa de juro “*forward*” implícita no contrato,  $r_{imp}$ , isto é:

$$\text{Preço do Futuro} = (100 - r_{imp})$$

Se, por exemplo, a taxa de juro “*forward*” implícita no contrato é de 4.5%, então o preço do futuro é igual a 95.5 e vice-versa. Esta forma de cotar os contratos de futuros sobre taxas de juro leva a que exista uma relação inversa entre o preço dos futuros e as taxas de juro, isto é, a um aumento nos preços dos futuros estará implícita uma descida das taxas de juro e vice-versa. Os quadros 4.2 e 4.3 apresentam as principais características dos contratos de futuros EURIBOR a 3 meses e de opções sobre futuros EURIBOR a 3 meses, ambos transaccionados na LIFFE.

**Quadro 4.2-** Especificação do contrato de futuros EURIBOR a 3 meses

<b>Unidade de negociação</b>	Depósito a 3 meses no valor de 1 000 000 Euros
<b>Método de Cotação</b>	100-Taxa de juro Implícita
<b>Vencimentos</b>	3 meses consecutivos e os 19 meses seguintes do ciclo Março, Junho, Setembro e Dezembro
<b>Liquidação/Exercício</b>	Exercício até às 17:00 horas em qualquer dia de negociação até ao dia de vencimento e até às 10:45 horas do último dia de negociação
<b>Dia da liquidação/Entrega</b>	Dia útil seguinte ao último dia da negociação
<b>Último dia de negociação</b>	Dois dias úteis antes da terceira quarta-feira do mês de vencimento até às 10:00 horas
<b>Mínima variação da cotação (Tick size &amp; value)</b>	1/2 ponto base (0.005), perfazendo 12.50 Euros

Fonte: LIFFE

**Quadro 4.3-** Especificação do contrato de opções sobre futuros EURIBOR a 3 meses

<b>Unidade de negociação</b>	Um contrato de Futuros Euribor 3 meses
<b>Vencimentos</b>	10 meses, 3 meses consecutivos e os 7 meses seguintes do ciclo Março, Junho, Setembro e Dezembro
<b>Liquidação/Exercício</b>	Exercício até às 17:00 horas em qualquer dia de negociação até ao dia de vencimento e até às 10:45 horas do último dia de negociação
<b>Dia da liquidação/Entrega</b>	Dia útil seguinte ao dia de exercício
<b>Último dia de negociação</b>	Dois dias úteis antes da terceira quarta-feira do mês de vencimento até às 10:00 horas
<b>Mínima variação da cotação (Tick size &amp; value)</b>	1/2 ponto base (0.005), perfazendo 12.50 Euros

Fonte: LIFFE

Uma característica institucional importante das opções sobre futuros de taxa de juro transaccionadas na LIFFE, consiste no facto de não ser necessário o pagamento do prémio da opção no momento da aquisição<sup>60</sup>. Este aspecto que deverá ser tomado em atenção na valorização das opções aí negociadas, leva a que não seja necessário introduzir um factor de actualização temporal, ou um elemento de taxa de juro para esse propósito. No entanto, por forma a garantir que o vendedor da opção receba o respectivo prémio, o comprador tem que fazer um depósito de colateral, no momento da compra, ajustado diariamente em função da evolução do prémio da opção, tal como acontece com os contratos de futuros, sendo o prémio pago na data de vencimento da opção. Estas opções são por vezes designadas por opções “puras”. Segundo Bahra (1996), apesar de serem do tipo americano, estas opções podem na prática ser tratadas como europeias, já que um exercício antecipado nunca será um comportamento óptimo para o detentor da opção.

#### **4.2 Informação utilizada na estimação das FDPNR**

Para estimarmos as FDPNR necessitamos de preços de opções sobre um conjunto de preços de exercício tão vasto quanto possível e que reflectam, com algum grau de confiança, as expectativas actuais do mercado. Porém, um problema que geralmente se coloca na recolha de preços das opções prende-se com o facto de que, apenas as opções com preços de exercício próximos do preço actual do activo subjacente ou moderadamente “*out-of-money*” apresentarem um nível de liquidez satisfatório que nos permita assegurar esse grau de confiança e como tal sejam passíveis de serem utilizados na análise. Normalmente, constata-se igualmente não existirem preços transaccionados para opções “*in-the-money*” ou profundamente “*out-of-money*”.

Dada esta situação, e por forma a minimizar os problemas que decorrem da não inclusão dos preços das opções associados a esses preços de exercício, ou da inclusão de preços de opções que pelo facto de serem ilíquidas não traduzem as verdadeiras expectativas do mercado, sendo o seu conteúdo informacional desta forma reduzido, recorre-se frequentemente neste tipo de estudo à utilização dos chamados “*end-of-day settlement prices*”, ou preços de referência diários. Estes preços são fixados administrativamente pelas bolsas no final de cada dia de negociação, reflectindo a tendência de mercado e são utilizados no chamado “*marking to market*” diário.

---

<sup>60</sup> Ver LIFFE (1999).

A utilização destes preços permite igualmente superar outro problema que está associado ao facto de que os preços das opções resultantes das transacções efectuadas sobre os diferentes preços de exercício não serem determinados todos em simultâneo, impossibilitando assim assegurar a compatibilidade das expectativas de mercado ao longo de um dia de negociação.

Na estimação das FDPNR foram assim utilizados os preços “*settlement*” de final de dia de opções de compra e venda sobre os futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses e respectivas volatilidades implícitas, para algumas datas anteriores e posteriores as reuniões do quinzenais do Conselho do BCE, nas quais se observou uma alteração da orientação da política monetária na Zona Euro, e para algumas datas anteriores e posteriores aos atentados terroristas ocorridos, em 11 de Setembro de 2001, nos Estados Unidos.

A informação utilizada é apresentada no **Anexo - Informação Utilizada** e foi gentilmente cedida pela LIFFE *Market Data Services*.

#### **4.3 Medidas de carácter estatístico utilizadas na interpretação das FDPNR estimadas**

Na análise das FDPNR estimadas serão utilizadas algumas estatísticas sumárias que nos ajudarão a interpretar as alterações de localização e formato observadas para as distribuições obtidas, contribuindo desse modo para uma melhor compreensão das alterações nas expectativas dos participantes no mercado. As estatísticas utilizadas visam essencialmente caracterizar aspectos como a localização, dispersão, assimetria e o achatamento das distribuições obtidas.

No que diz respeito às medidas de localização utilizadas, elas consistem na média, mediana e moda das distribuições estimadas. A média traduz o valor esperado futuro do preço do activo subjacente, no nosso caso a taxa de juro, ou o valor médio ponderado da mesma tendo em conta todas as probabilidades de realização possíveis. A mediana é definida como sendo o valor que divide a área da distribuição em duas partes iguais, 50% para cada lado, sendo uma medida alternativa para caracterizar o centro da distribuição. A moda é o valor mais provável para o preço futuro do activo subjacente, sendo assim o valor que maximiza a função de densidade de probabilidade estimada.

Na maior parte dos casos, tendo em conta a relação entre a média, a moda e a mediana, podemos caracterizar as distribuições estimadas com sendo assimétricas positivas, ou enviesadas à direita ( $\text{moda} < \text{mediana} < \text{média}$ ), assimétricas negativas, ou enviesadas à esquerda ( $\text{média} < \text{mediana} < \text{moda}$ ) ou simétricas ( $\text{média} = \text{mediana} = \text{moda}$ ).

No que diz respeito à dispersão das distribuições, esta traduz de algum modo a incerteza patente no mercado relativamente ao valor que o preço do activo subjacente vai assumir no futuro. As medidas utilizadas neste trabalho serão o desvio padrão, a raiz quadrada do segundo momento central da distribuição, que traduz a incerteza em torno da média da distribuição, e a distância inter-quartis. Esta última medida dá-nos a diferença entre o primeiro e o terceiro quartis, dando-nos uma ideia da dimensão do intervalo central da distribuição que compreende 50% da mesma.

Relativamente à assimetria, esta característica da distribuição está relacionada com o comportamento da distribuição de probabilidade em cada um dos lados da média. Por exemplo, uma distribuição assimétrica positiva caracteriza-se por ser uma distribuição em que existe uma maior probabilidade de a variável em causa assumir valores bastante acima da média do que valores bastante inferiores à média. A medida de assimetria utilizada no estudo é o segundo coeficiente de assimetria “*skewness*” de *Pearson*. Este coeficiente é dado por três vezes o rácio entre a diferença, entre a média e a mediana da distribuição, e o seu desvio padrão (segundo *Pearson* pode variar entre -3 e 3).

No que diz respeito ao achatamento da distribuição, este permite inferir de alguma forma o formato da distribuição em torno da média da mesma, em particular se este é mais ou menos em “cume”, permitindo igualmente apurar a massa de probabilidade associada a realizações extremas da variável em causa, quanto maior essa probabilidade, mais largas serão as abas da distribuição. A medida de achatamento utilizada na análise será o coeficiente de achatamento ou “*kurtosis*”, dado pelo rácio entre o quarto momento centrado da distribuição e a variância elevada ao quadrado, subtraído de 3 unidades. Utilizando a distribuição Normal como “*benchmark*”, valores positivos (negativos) da “*kurtosis*” significam que a distribuição em causa possui as abas mais (menos) largas e, ou, a moda mais (menos) pronunciada do que a distribuição Normal. Por outras palavras, valores da “*kurtosis*” positivos indicam uma distribuição relativamente em cume (leptocúrtica), enquanto que valores da “*kurtosis*” negativos indicam uma distribuição relativamente plana (platicúrtica), valores próximos de zero apontam para uma distribuição mesocúrtica.

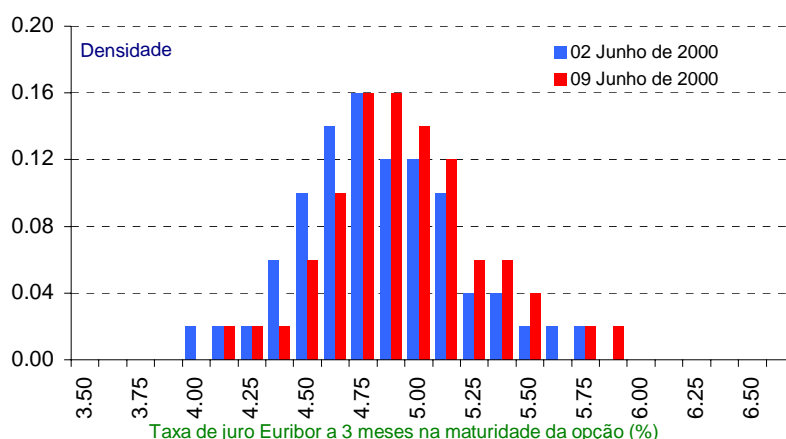
#### 4.4 A estimação de FDPNR implícitas nos preços das opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses

Nesta secção proceder-se-á à estimação das FDPNR implícitas nos preços das opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses, recorrendo numa primeira fase aos histogramas de probabilidade e posteriormente à aplicação de uma metodologia assente numa mistura de duas e de três distribuições lognormais. Estima-se igualmente a FDPNR com base apenas numa distribuição lognormal conforme o vaticinado pelo modelo de Black-Sholes.

##### 4.4.1 Histogramas de probabilidade

Como foi referido no capítulo 3 a abordagem mais simples no âmbito da estimação das FDPNR consiste na derivação de um histograma de probabilidades, conforme o proposto por Neuhaus (1995) e utilizado posteriormente nos trabalhos de Nakamura e Shiratsuka (1999) e Manzano e Sánches (1998). Com base nessa abordagem apresenta-se a seguir, a título de exemplo, a estimação de alguns histogramas de probabilidades risco-neutrais, para algumas datas anteriores e posteriores a algumas reuniões do Conselho do BCE. Os histogramas apresentados traduzem as probabilidades de o preço do activo subjacente, na data da maturidade, cotar entre dois preços de exercício consecutivos<sup>61</sup>, tendo sido obtidos através do recurso à fórmula [3.10].

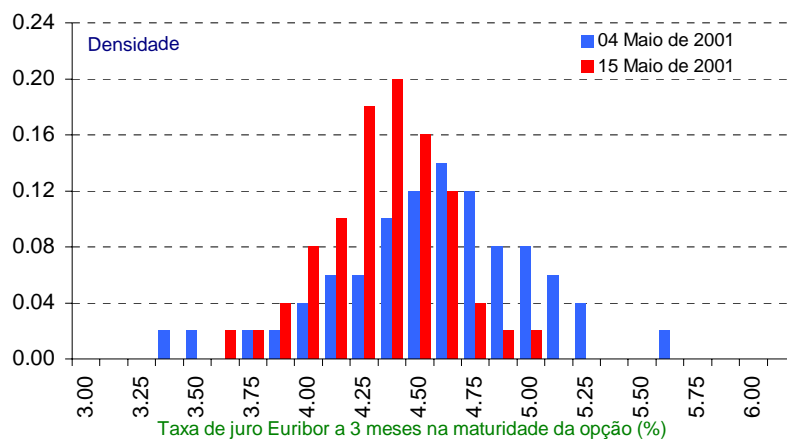
**Figura 4.1:** Histograma das probabilidades risco-neutrais para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses baseado no contrato de opções com vencimento em Setembro de 2000



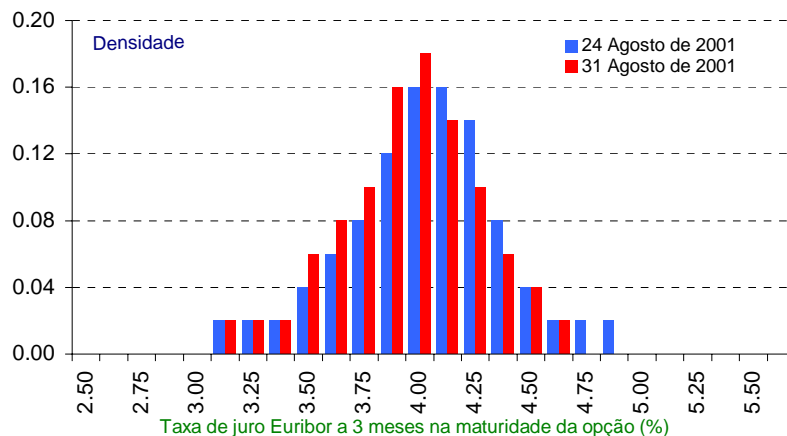
<sup>61</sup> Os preços de exercício estão expressos em taxa de juro.



**Figura 4.2:** Histograma das probabilidades risco-neutrais para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses baseado no contrato de opções com vencimento em Setembro de 2001



**Figura 4.3:** Histograma das probabilidades risco-neutrais para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses baseado no contrato de opções com vencimento em Setembro de 2001



A observação das figuras 4.1 e 4.2 permite constatar a alteração das expectativas do mercado relativamente à taxa de juro EURIBOR a 3 meses na data de vencimento do contrato de opções em causa, em resultado das decisões de política monetária tomadas pelo BCE nas reuniões do Conselho de 8 de Junho de 2000 e 10 Maio de 2001, respectivamente. A alteração das expectativas do mercado, é reflectida pelas deslocações observadas na distribuição da massa de probabilidade, entre duas datas, dada pelos histogramas de probabilidade, e evidencia de algum modo o grau em que o mercado foi surpreendido pela autoridade monetária. No que diz respeito à figura 4.3, ela mostra as expectativas do mercado em torno da reunião do Conselho do BCE de 30

de Agosto de 2001. O facto de a distribuição de probabilidade, dada pelos histogramas, se manter praticamente inalterada, entre as duas datas analisadas, poderá indiciar que o mercado não foi surpreendido pelas decisões de política monetária tomadas nessa reunião.

Uma análise mais detalhada das expectativas prevalecentes no mercado em torno destas reuniões será efectuada mais à frente<sup>62</sup> com recurso a uma técnica mais consistente para a estimação das FDPNR.

Como vimos acima, a simples estimação de histogramas de probabilidade pode dar-nos, ainda de que de um modo grosseiro, algumas indicações sobre as expectativas existentes no mercado relativamente à evolução futura das taxas de juro de curto prazo. Porém, este tipo de abordagem possui algumas limitações importantes, as quais já foram apontadas anteriormente<sup>63</sup>. Nesse sentido, de modo a efectuar-se uma análise mais concreta das expectativas, nomeadamente procurando quantificar com base num conjunto de estatísticas sumárias as alterações observadas, proceder-se-á na próxima secção à estimação das FDPNR a partir de uma combinação de duas e de três distribuições lognormais. Será igualmente estimada a FDPNR com base apenas numa distribuição lognormal a qual servirá apenas de “*benchmark*” a ser superado pelas duas técnicas anteriormente referidas.

#### **4.4.2 A estimação da FDPNR recorrendo a uma mistura de distribuições lognormais**

As opções sobre futuros de taxas de juro transaccionadas na LIFFE são do tipo Americano, podendo deste modo ser exercidas em qualquer momento até à data do vencimento do contrato. Esta situação poderia trazer algumas dificuldades acrescidas à estimação da função de densidade de probabilidade implícita no preço das opções, como já vimos anteriormente. Contudo, verifica-se que o exercício antecipado das opções raramente se verifica, e o modelo mais utilizado na sua valorização é uma versão modificada do modelo de Black-Sholes conhecido como Black-76:

$$C(.) = R_X \Phi(-d_2) - R_F \Phi(-d_1) \quad [4.1]$$

---

<sup>62</sup> Ver secção 4.5.

<sup>63</sup> Ver capítulo 3, páginas 50-51.

$$P(.) = R_F \Phi(d_1) - R_X \Phi(d_2) \quad [4.2]$$

onde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{R_F}{R_X}\right) + \left(\frac{\sigma^2 \times \tau}{2}\right)}{\sigma \times \sqrt{\tau}} \quad d_2 = d_1 - \sigma \times \sqrt{\tau}$$

com,

- $C(.)$  o prémio de uma opção de compra;
- $P(.)$  o prémio de uma opção de venda;
- $R_F$  a taxa de juro implícita no preço do futuro, isto é,  $(100-F)$ ;
- $R_X$  a taxa de juro implícita no preço de exercício, isto é,  $(100-X)$ ;
- $\sigma$  a volatilidade das taxas de juro implícitas nos preços dos futuros, medido pelo desvio padrão anual;
- $\tau$  o intervalo de tempo até à maturidade em anos;
- $\Phi(.)$  a função cumulativa da distribuição normal.

Observa-se igualmente a paridade “*put-call*” que é uma relação característica das opções Europeias. Esta situação leva a que as opções sobre futuros de taxas de juro transaccionadas na LIFFE possam ser valorizadas como opções Europeias, simplificando assim a nosso estudo.

O valor de uma opção de compra na maturidade (valor intrínseco) é dado pela diferença entre o preço do futuro e o preço de exercício, no caso do preço do futuro ser superior ao preço de exercício da opção, ou zero, caso o preço do futuro seja inferior ao preço de exercício. Tendo em conta o que já foi visto no capítulo 2, o valor de uma opção de compra pode ser dado por:

$$C(S_T, \tau, X) = \int_X^{\infty} (S_T - X) q_F(S_T) dS_T \quad [4.3]$$

onde,  $S_T$  é o preço do futuro na data da maturidade da opção;  $X$  é o preço de exercício da opção e  $q_F(S_T)$  é a função de densidade de probabilidade neutra ao risco terminal do preço do futuro, avaliada em  $S_T$ . A expressão [4.3] é idêntica à [2.6] apresentada

anteriormente, sendo que a grande diferença é a ausência do factor de actualização temporal,  $e^{-r\tau}$ , pelas razões já atrás apontadas<sup>64</sup>.

Efectuando-se uma substituição da variável  $S_T$  por  $S_T=100-r_T$ , em que  $r_T$  é a taxa de juro implícita no preço do futuro e tendo em conta que  $dS_T=-dr_T$ <sup>65</sup>, a expressão [4.3] transforma-se em:

$$\begin{aligned} C(r_T, \tau, X) &= \int_{100-X}^{-\infty} -(100 - r_T - X) q_F(100 - r_T) dr_T \\ &= \int_{-\infty}^{100-X} ((100 - X) - r_T) q_F(100 - r_T) dr_T \end{aligned} \quad [4.4]$$

Uma vez que  $q_F(100 - r_T) = q_R(r_T)$ , em que  $q_R(r_T)$  é a função de densidade de probabilidade neutra ao risco da taxa de juro em  $T$  avaliada em  $r_T$ . Substituindo este resultado na equação [4.4] vem:

$$C(r_T, \tau, X) = \int_{-\infty}^{100-X} ((100 - X) - r_T) q_R(r_T) dr_T \quad [4.5]$$

Tendo em conta que  $(100-X)$  não é mais que o preço de exercício da opção expresso em função da taxa de juro, podemos concluir que uma opção de compra sobre um futuro de taxa de juro pode ser interpretada como uma opção de venda sobre a taxa de juro, donde o valor da opção de compra em função dos parâmetros da distribuição terminal para a taxa de juro será dada, para uma mistura de duas distribuições lognormais, por uma expressão semelhante à expressão [3.21] em que não existe o factor de actualização temporal e em que  $X$  é substituído por  $(100-X)$ .

$$\begin{aligned} C(X, \tau) &= \theta \left[ -e^{\frac{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2}{2}} N(-d_1) - (100 - X) N(-d_2) \right] + \\ &+ (1 - \theta) \left[ -e^{\frac{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2}{2}} N(-d_3) - (100 - X) N(d_4) \right] \end{aligned} \quad [4.6]$$

O mesmo raciocínio pode ser desenvolvido no que diz respeito a uma opção de venda sobre um futuro de taxa de juro. Neste caso, o valor de uma opção de venda em função dos parâmetros da distribuição terminal da taxa de juro é dado por uma expressão idêntica a [3.20], em que as diferenças são as referenciadas no parágrafo anterior.

---

<sup>64</sup> Ver página 83.

<sup>65</sup> Como vimos anteriormente, existe uma relação inversa entre o preço do futuro e a taxa de juro implícita no mesmo.

$$P(X, \tau) = \theta \left[ e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} N(d_1) - (100 - X)N(d_2) \right] + \\ + (1 - \theta) \left[ e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} N(d_3) + (100 - X)N(-d_4) \right] \quad [4.7]$$

onde,

$$d_1 = \frac{-\ln(100 - X) + \mu_1 + \sigma_1^2}{\sigma_1}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_1 \\ d_3 = \frac{-\ln(100 - X) + \mu_2 + \sigma_2^2}{\sigma_2}, \quad d_4 = d_3 - \sigma_2$$

Serão as expressões [4.6] e [4.7] que serão utilizadas na resolução do problema de optimização dado pela expressão [3.17]<sup>66</sup> e que permitirá estimar os parâmetros da FDPNR com base numa mistura de duas distribuições lognormais.

A estimação da FDPNR com base numa combinação de três distribuições lognormais segue o raciocínio anterior, sendo apenas necessário adicionar às expressões [4.6] e [4.7] as componentes associadas à terceira distribuição. Assim, na resolução do problema de optimização, serão utilizadas as seguintes expressões para o prémios de uma opção de compra e venda, respectivamente:

$$C(X, \tau) = \theta \left[ -e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} N(-d_1) - (100 - X)N(-d_2) \right] + \\ + \alpha \left[ -e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} N(-d_3) - (100 - X)N(d_4) \right] + \lambda \left[ -e^{\mu_3 + \frac{1}{2}\sigma_3^2} N(-d_5) - (100 - X)N(d_6) \right] \quad [4.8]$$

$$P(X, \tau) = \theta \left[ e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} N(d_1) - (100 - X)N(d_2) \right] + \\ + \alpha \left[ e^{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2} N(d_3) + (100 - X)N(-d_4) \right] + \lambda \left[ e^{\mu_3 + \frac{1}{2}\sigma_3^2} N(d_5) + (100 - X)N(-d_6) \right] \quad [4.9]$$

onde,

$$\theta + \alpha + \lambda = 1$$

---

<sup>66</sup> Na resolução do problema de optimização é utilizada uma versão reduzida da função objectivo [3.17], excluindo-se desta o factor de aproximação à média, com as vantagens daí decorrentes, em termos da avaliação da precisão da distribuição estimada.

$$d_1 = \frac{-\ln(100 - X) + \mu_1 + \sigma_1^2}{\sigma_1}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_1$$

$$d_3 = \frac{-\ln(100 - X) + \mu_2 + \sigma_2^2}{\sigma_2}, \quad d_4 = d_3 - \sigma_2$$

$$d_5 = \frac{-\ln(100 - X) + \mu_3 + \sigma_3^2}{\sigma_3}, \quad d_6 = d_5 - \sigma_3$$

Na sequência do que foi exposto é apresentado, a seguir, um exemplo da estimação da FDPNR para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses utilizando uma mistura de duas e de três distribuições lognormais. É efectuada, igualmente, uma comparação entre os resultados gerados por estas metodologias e aquela que consiste na utilização, apenas, de uma distribuição lognormal.

A informação utilizada nesta exposição é composta pelos “*settlement prices*” das opções de compra e venda sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em 2 de Junho de 2000. No quadro 4.4 estão expostos os resultados da estimação das FDPNR com recurso à utilização de uma, e uma combinação de duas e três distribuições lognormais.

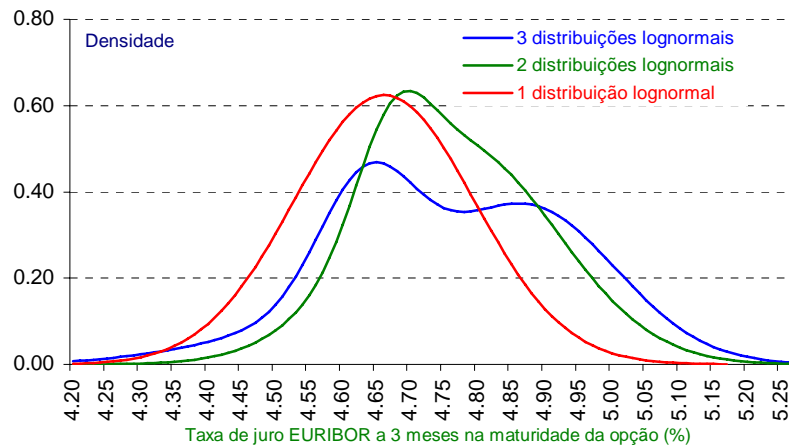
**Quadro 4.4:** Parâmetros estimados e somatório do quadrado dos resíduos

<b>Parâmetros</b>	<b>Nº de distribuições lognormais</b>		
	<b>Três</b>	<b>Duas</b>	<b>Uma</b>
Ponderador <sub>1</sub>	0.5728	0.1425	1
Média <sub>1</sub>	4.8789	4.6740	4.7650
Desvio Padrão <sub>1</sub>	0.1318	0.0538	0.1342
Ponderador <sub>2</sub>	0.2698	0.8575	-
Média <sub>2</sub>	4.6364	4.7805	-
Desvio Padrão <sub>2</sub>	0.0725	0.1431	-
Ponderador <sub>3</sub>	0.1574	-	-
Média <sub>3</sub>	4.5721	-	-
Desvio Padrão <sub>3</sub>	0.1666	-	-
<b>Somatório do quadrado dos resíduos</b>	0.0000372	0.0000452	0.000155124

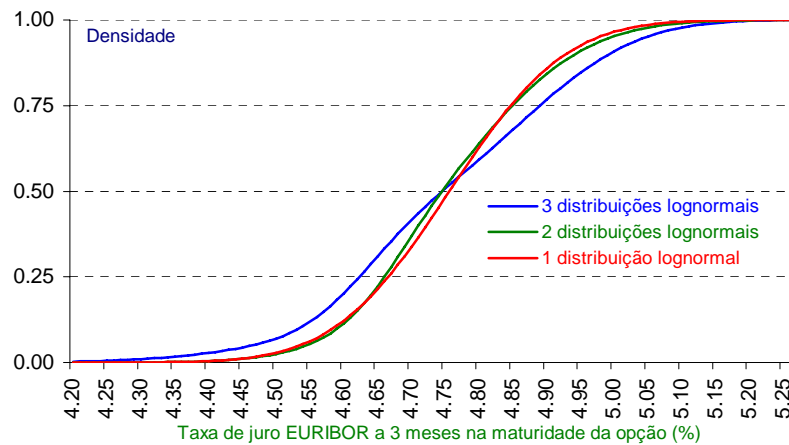
onde,  $ponderador_i$ ,  $média_i$ , desvio  $padrão_i$ , representam o peso atribuído, a média e o desvio padrão de cada uma das distribuições estimadas, com  $i=1, 2, 3$ .

Na figura 4.4 estão representadas as FDPNR estimadas, de acordo com as três técnicas, e na figura 4.5 as respectivas funções de probabilidade cumulativas.

**Figura 4.4:** Funções de densidade de probabilidade neutras ao risco, em 2 Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000



**Figura 4.5:** Funções de distribuição de probabilidade cumulativas neutras ao risco, em 2 Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000



Para uma caracterização mais objectiva das distribuições estimadas foram calculadas algumas estatísticas sumárias, as quais são apresentadas no quadro 4.5.

**Quadro 4.5:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas com uma distribuição lognormal e com uma mistura de duas e três distribuições lognormais

<i>Estatísticas</i>	<i>Nº de distribuições lognormais</i>		
	Três	Duas	Uma
Média	4.76	4.76	4.76
Mediana	4.75	4.75	4.76
Moda	4.65	4.70	4.76
Desvio Padrão	0.1569	0.1906	0.1959
Q 25%	4.63	4.66	4.67
Q 75%	4.90	4.85	4.85
Dist. Inter-quartis	0.27	0.19	0.18
Assimetria	0.1500	0.1773	0
Kurtosis	-0.6246	1.1414	0.8980

Após a estimação de uma FDPNR, uma questão pertinente que se coloca, prende-se com a bondade-do-ajustamento dessa distribuição à realidade. Nesse sentido, uma comparação entre a média da distribuição estimada e a taxa “*forward*” implícita no contrato de futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses, assim como uma análise das diferenças entre os preços das opções estimados de acordo com a distribuição obtida e os preços observados no mercado poderão dar-nos alguma informação sobre essa matéria. No exemplo apresentado, verifica-se que a média de todas as distribuições estimadas coincide com a taxa “*forward*” implícita no contrato de futuros, de Setembro de 2000, da taxa de juro EURIBOR a 3 meses (4.76%), em 2 Junho de 2000. Se tivermos em atenção que no dia 2 de Junho de 2000, a taxa de juro EURIBOR a três meses se cifrava em 4.47%, conclui-se facilmente que o mercado estaria a antecipar uma subida das taxas de juro de referência do BCE, na medida em que a taxa de juro esperada para o prazo de três meses em Setembro de 2000, é cerca de 29 p.b. superior há que vigorava, à data, no mercado.

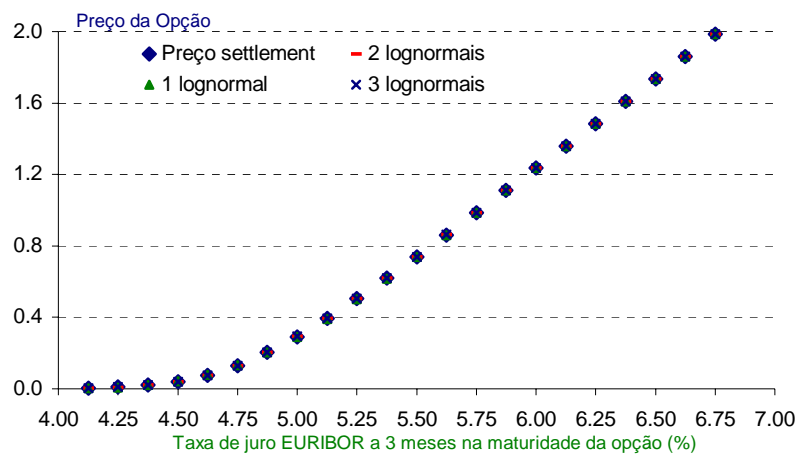
No que diz respeito às diferenças, entre os preços das opções estimados e os observados no mercado, como se pode constatar através da observação das figuras 4.6 e 4.7, os preços “teóricos” gerados pelas três distribuições são bastante semelhantes aos “reais”.

As figuras 4.8 e 4.9 mostram em detalhe os erros na valorização das opções de compra e venda, respectivamente, resultantes das três FDPNR estimadas. Da observação destas verifica-se facilmente que os erros de valorização obtidos são insignificantes face aos preços das opções observados no mercado, podendo ainda concluir-se que as FDPNR estimadas tendo por base uma mistura de duas e três distribuições lognormais parecem

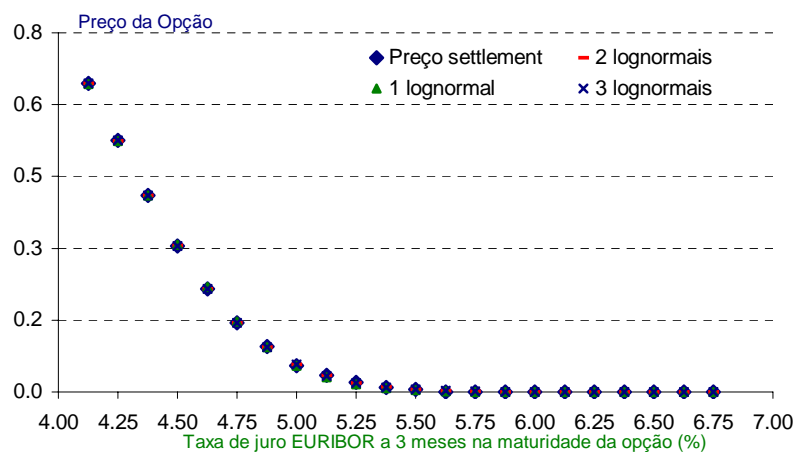


evidenciar uma bondade do ajustamento superior à apresentada pela FDPNR que assenta no modelo clássico de Black-Sholes.

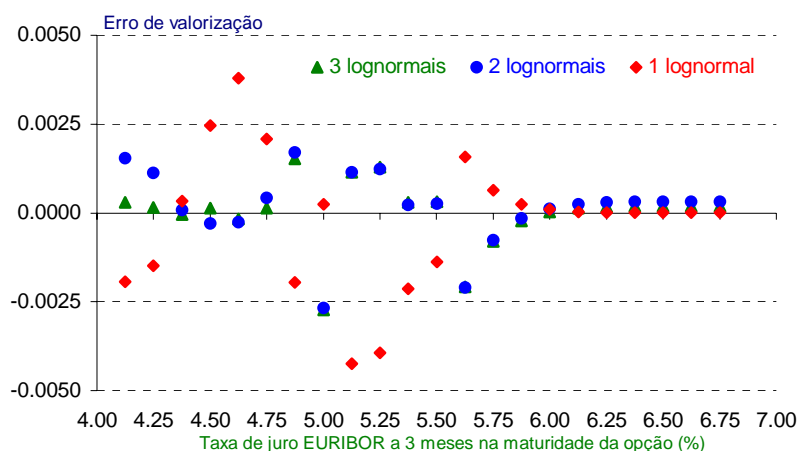
**Figura 4.6:** Preços estimados e preços “*settlement*”, em 2 Junho de 2000, das opções de compra sobre futuros da taxa EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000



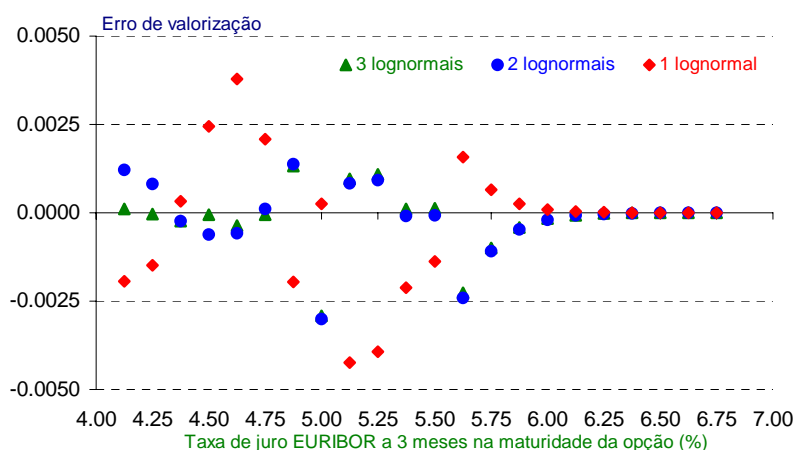
**Figura 4.7:** Preços estimados e preços “*settlement*”, em 2 Junho de 2000, das opções de venda sobre futuros da taxa EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000



**Figura 4.8:** Erros de valorização nos preços estimados das opções de compra sobre futuros da taxa EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000, em 2 Junho de 2000



**Figura 4.9:** Erros de valorização nos preços estimados das opções de venda sobre futuros da taxa EURIBOR a 3 meses para Setembro de 2000, em 2 Junho de 2000



Este mesmo resultado foi obtido aquando da estimação das restantes FDPNR apresentadas ao longo deste trabalho podendo-se concluir que a estimação da FDPNR com base numa mistura de três e duas distribuições lognormais oferece melhores garantias que a utilização de uma simples distribuição lognormal como é defendido no âmbito do modelo de Black-Sholes. Este resultado vem igualmente, e de algum modo, confirmar o facto de que o preço de alguns activos financeiros, neste caso as taxas de juro, tende a não seguir uma distribuição lognormal pura, mas sim um outro tipo de distribuição que poderá ser eventualmente aproximada por uma mistura de duas ou mais distribuições lognormais.

Quanto à opção pela utilização de duas ou três distribuições lognormais, uma vez que os ganhos em termos de bondade do ajustamento com a utilização de três distribuições são mínimos e que a mesma requer a estimação de oito parâmetros, iremos optar pela estimação da FDPNR com base numa combinação de duas distribuições lognormais, para desenvolvermos o nosso estudo.

#### **4.5 Análise das expectativas contidas nas FDPNR estimadas para taxa de juro EURIBOR a 3 meses em algumas datas anteriores e posteriores às reuniões quinzenais do Conselho do BCE**

Nesta secção pretende-se avaliar em que medida a informação contida nas FDPNR estimadas em algumas datas anteriores e posteriores às reuniões quinzenais do Conselho do BCE, permite antecipar eventuais alterações na taxas de juro de referência da autoridade monetária. Pretende-se, igualmente, analisar o impacto das decisões tomadas nessas reuniões, nas expectativas dos agentes participantes no mercado, relativamente à evolução futura das taxas de curto prazo na área do Euro.

A nossa análise vai centrar-se, em particular, nas reuniões do Conselho do BCE realizadas em 8 de Junho de 2000, 10 Maio de 2001 e 30 de Agosto de 2001 nas quais o BCE decidiu proceder a alterações na orientação da sua política monetária.

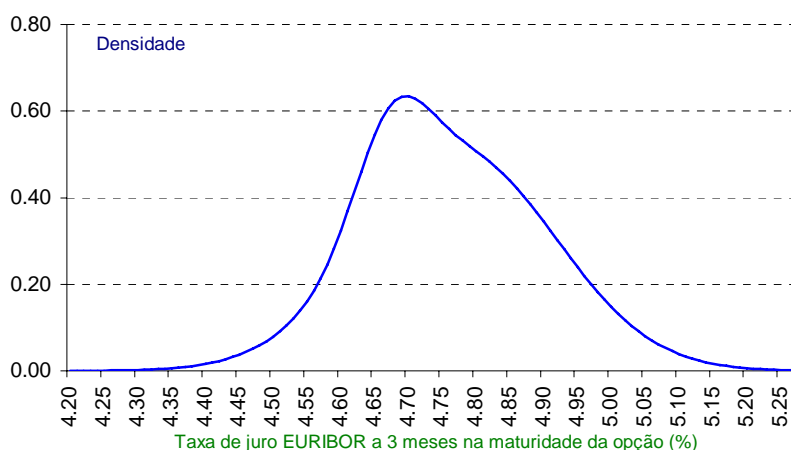
A escolha destas reuniões em particular, e não outras, prende-se com o contexto, em termos de expectativas, presente em cada uma delas. Assim, de acordo com as opiniões dos participantes no mercado, o aumento das taxas directoras do BCE, em 50 p.b., na reunião de 8 de Junho de 2000, surpreendeu em parte o mercado que antecipava apenas uma subida de 25 p.b.. No diz respeito à reunião de 10 de Maio de 2001, o corte de taxas observado foi, segundo alguns analistas, totalmente inesperado, enquanto, pelo contrário, a descida verificada na reunião de 30 de Agosto de 2001 já era largamente antecipada pelo mercado.

#### 4.5.1 Expectativas em torno da reunião de 8 Junho de 2000

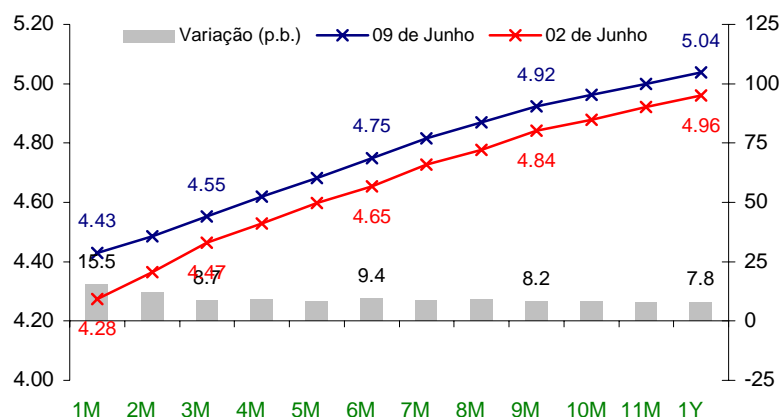
Na reunião 8 Junho de 2000, o Conselho do BCE decidiu aumentar as suas taxas de juro directoras em 50 p.b., fixando a taxa de juro das operações principais de refinanciamento em 4.25%, e as taxas de juro das facilidades permanentes de cedência e depósito de liquidez, em 5.25% e 3.25%, respectivamente.

Durante a semana que antecedeu a alteração da orientação da política monetária por parte do BCE, as principais taxas de juro da Zona do Euro vinham a reflectir uma subida esperada das taxas oficiais do BCE no decorrer do mês de Junho. A divulgação da evolução do agregado M3 para Abril (6.5%), acima do previsto pelo mercado e do valor de referência definido pelo BCE (4.5%), na semana que antecedeu a reunião, conjuntamente com a apresentação do relatório da OCDE que apresentava uma revisão em alta do crescimento económico, eram factos que apontavam para a necessidade de uma subida das taxas de juro de referência. De um inquérito efectuado em 2 de Junho de 2000, pela a agência *Reuters* a um conjunto de 60 economistas, 57 previam uma subida das taxas de juro oficiais do BCE na reunião de 8 de Junho, a quase totalidade dos quais em 25 p.b., com o intuito de atenuar as eventuais pressões inflacionistas decorrentes de uma aceleração da oferta de moeda. Na figura 4.10 apresenta-se a FDPNR para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000, estimada em 2 de Junho de 2000. O formato da função ilustra perfeitamente as expectativas de subida das taxas de juro anteriormente descritas. A FDPNR obtida é igualmente consistente com a estrutura temporal das taxas de juro EURIBOR positivamente inclinada em 2 de Junho de 2000 (figura 4.11).

**Figura 4.10:** Função de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 2 de Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000



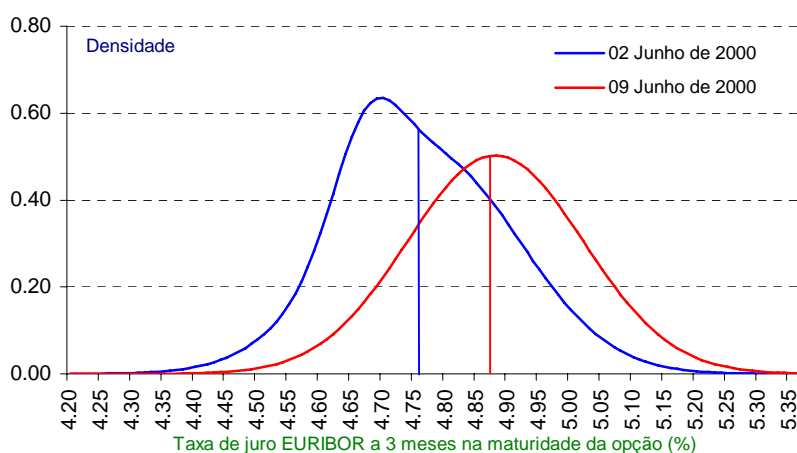
**Figura 4.11:** Curva de rendimentos das taxas de juro EURIBOR em 2 e 9 de Junho de 2000



Fonte: Reuters

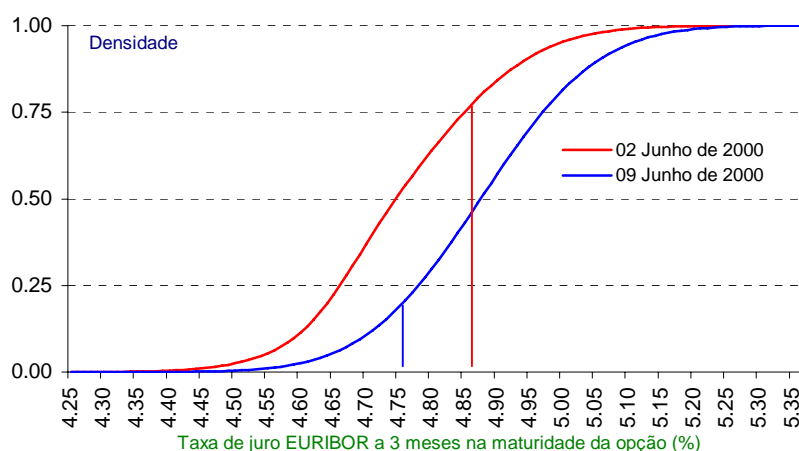
A figura 4.12 confronta a FDPNR estimada em 2 de Junho de 2000 e um dia após a decisão do BCE em aumentar as suas taxas de juro oficiais em 50 p.b. e a figura 4.13 as respectivas funções de distribuição de probabilidade cumulativa.

**Figura 4.12:** Funções de densidade de probabilidade neutra ao risco<sup>67</sup>, em 2 e 9 de Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000



<sup>67</sup> As rectas verticais de cores diferentes apresentadas nos gráficos indicam as médias das respectivas distribuições de probabilidade.

**Figura 4.13:** Funções de distribuição de probabilidade cumulativa neutras ao risco, em 2 e 9 de Junho de 2000 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2000



Muito embora o mercado estivesse a antecipar uma possível subida das taxas de referência do BCE, facto que pode ser observado através de uma aba direita algo pronunciada da FDPNR estimada em 2 de Junho e pela média desta distribuição ser superior em cerca de 29 p.b. a taxa EURIBOR a 3 meses para a mesma data, a verdade é que foi, em certa medida, surpreendido pelo aumento em 50 p.b..

Nesse sentido, em 9 de Junho, verificou-se, face a 2 de Junho, um forte deslocamento da massa de probabilidade para a direita, o que significa que os agentes reviram em alta as suas expectativas, em relação à taxa de juro EURIBOR a 3 meses, para Setembro de 2000. Esta deslocação traduziu o rápido ajustamento das expectativas dos participantes no mercado à decisão tomada pelo BCE.

O valor mais provável para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses em Setembro (medido pela moda da distribuição) sofreu um acréscimo de cerca de 18 p.b., passando de 4.70% para 4.88% em 9 de Junho (quadro 4.6), reflectindo quase totalmente os 25 p.b. de aumento que não eram esperados pelo mercado. A revisão em alta das expectativas dos agentes foi acompanhada de uma redução da incerteza e enviesamento, como atesta a configuração menos alongada e mais simétrica da FDPNR em 9 de Junho.

No quadro 4.6 podem ver-se as diferentes estatísticas sumárias referentes às duas distribuições estimadas, que corroboram o que foi dito anteriormente.

**Quadro 4.6:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 2 e 9 Junho de 2000

<i>Estatísticas</i>	<i>02-Jun-00</i>	<i>09-Jun-00</i>
Média	4.76	4.88
Mediana	4.75	4.88
Moda	4.70	4.88
Desvio Padrão	0.1906	0.1576
Q 25%	4.66	4.78
Q 75%	4.85	4.97
Dist. Inter-quartis	0.19	0.19
Assimetria	0.1773	0
Kurtosis	1.1414	0.9141

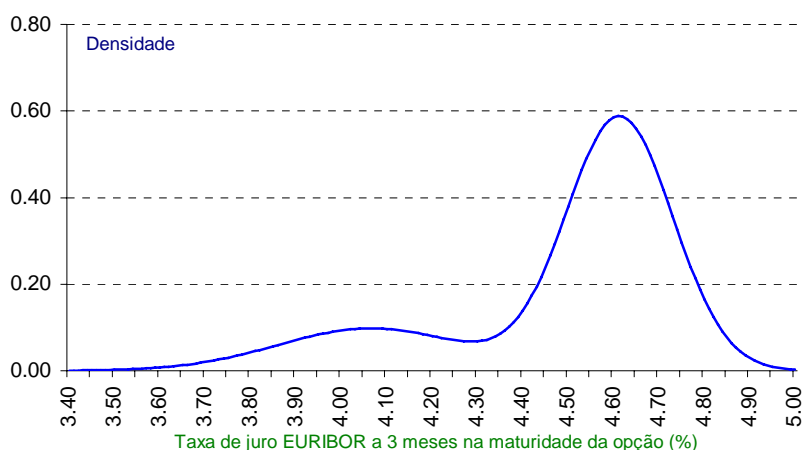
#### **4.5.2 Expectativas em torno da reunião de 10 Maio de 2001**

Na reunião de 10 de Maio de 2001, o Conselho do BCE decidiu reduzir as suas taxas de juro oficiais em 25 p.b., fixando a taxa mínima de proposta das operações principais de refinanciamento em 4.50%, e as taxas das facilidades permanentes de cedência e depósito de liquidez em 5.50% e 3.50%, respectivamente.

Na semana anterior à tomada de decisão do BCE, foram divulgadas algumas previsões que apontavam, por um lado, para um arrefecimento da economia europeia e, por outro, para a persistência da inflação em níveis superiores aos 2% tidos com referência pelo BCE. No dia 30 de Abril, foi ainda conhecido o valor do agregado M3 para Março (5%) que se traduziu no aumento mais significativo desde que se tinha começado a registar um abrandamento do crescimento da oferta monetária, a partir do segundo semestre de 2000. Neste contexto, as expectativas quanto a um possível corte das taxas na reunião de 10 de Maio não eram de todo consensuais, embora o sentimento predominante no mercado fosse uma manutenção das mesmas. Este sentimento era corroborado por uma sondagem efectuada pela *Reuters* em 3 de Maio, na qual apenas cerca de 5% dos inquiridos acreditavam num possível corte na reunião de 10 de Maio. Na mesma sondagem, o mês de Junho era apontado como o mais provável para uma eventual descida, reunindo a preferência de 47% dos inquiridos. Na figura 4.14 apresenta-se a FDPNR para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, para Setembro de 2001, estimada em 4 de Maio de 2001, que evidencia de algum modo as expectativas presentes no mercado aproximadamente uma semana antes da alteração das taxas. A média da FDPNR situa-se cerca de 32 p.b. abaixo da taxa de juro EURIBOR a três meses naquela data

evidenciando deste modo as expectativas de um futuro “*easing*” na política monetária seguida pelo BCE.

**Figura 4.14:** Função de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 4 de Maio de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2001

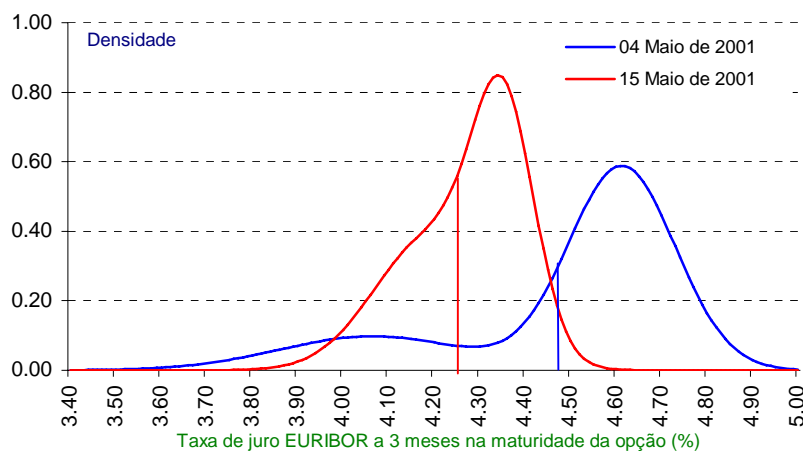


As figuras 4.15 e 4.16 ilustram a revisão das expectativas dos agentes, resultado da descida, de alguma forma inesperada, das taxas de juro oficiais do BCE na reunião de 8 de Maio. Nesse sentido, observou-se uma forte deslocação para a esquerda da distribuição da massa de probabilidade, com a média da mesma a sofrer uma redução em cerca de 22 p.b. (quadro 4.7), reflectindo dessa forma quase totalmente a dimensão do corte nas taxas. Embora, o desvio padrão da distribuição de probabilidade tenha aumentado, a redução observada da distância inter-quartis em cerca de 8 p.b., permite concluir que se assistiu a uma redução da incerteza no mercado, como atesta a configuração mais em “cume” da distribuição estimada em 15 de Maio.

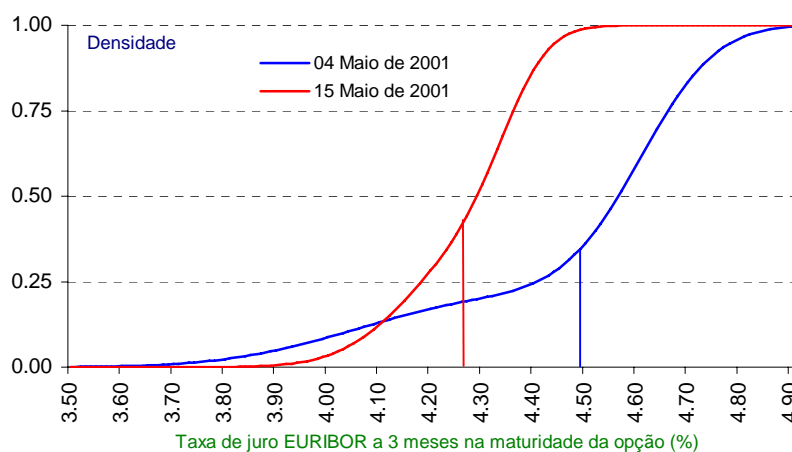
Quer em 4 de Maio, quer em 15 de Maio, as FDPNR estimadas eram assimétricas negativas (embora se tenha assistido a uma redução da assimetria com a alteração das taxas de juro directoras), ou seja, os agentes económicos estavam a atribuir uma maior probabilidade a que a taxa de juro EURIBOR a 3 meses em Setembro fosse inferior à moda da distribuição do que superior, o que significa que o mercado tinha uma maior confiança numa redução futura das taxas de juro do que numa eventual subida das mesmas. Este facto é corroborado por uma aba esquerda de ambas as distribuições mais pronunciada do que a direita, estando igualmente de acordo com a inclinação negativa da estrutura temporal das taxas de juro EURIBOR naquelas datas (figura 4.17).



**Figura 4.15:** Funções de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 4 e 15 de Maio de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2001



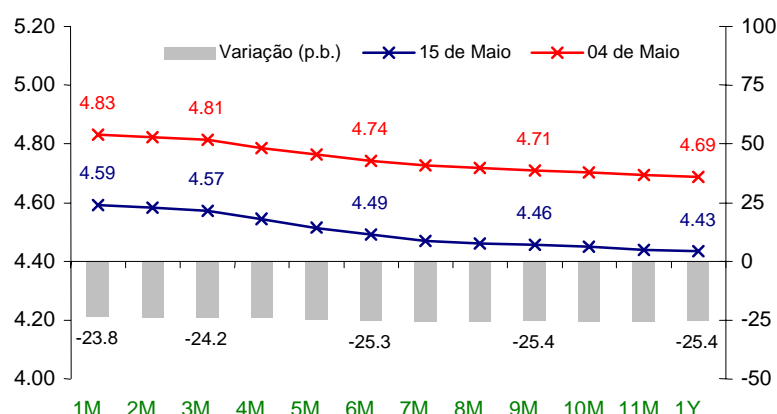
**Figura 4.16:** Funções de distribuição de probabilidade cumulativa neutras ao risco, em 4 e 15 de Maio de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro de 2001



**Quadro 4.7:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 4 e 15 de Maio de 2001

<i>Estatísticas</i>	<i>04-Mai-01</i>	<i>15-Mai-01</i>
Média	4.49	4.27
Mediana	4.57	4.29
Moda	4.61	4.34
Desvio Padrão	0.1615	0.2236
Q 25%	4.41	4.19
Q 75%	4.67	4.37
Dist. Inter-quartis	0.26	0.18
Assimetria	-1.5113	-0.2538
Kurtosis	2.2058	2.8845

**Figura 4.17:** Curva de rendimentos das taxas de juro EURIBOR em 4 e 15 de Maio de 2001



Fonte: Reuters

### 4.5.3 Expectativas em torno da reunião de 30 Agosto de 2001

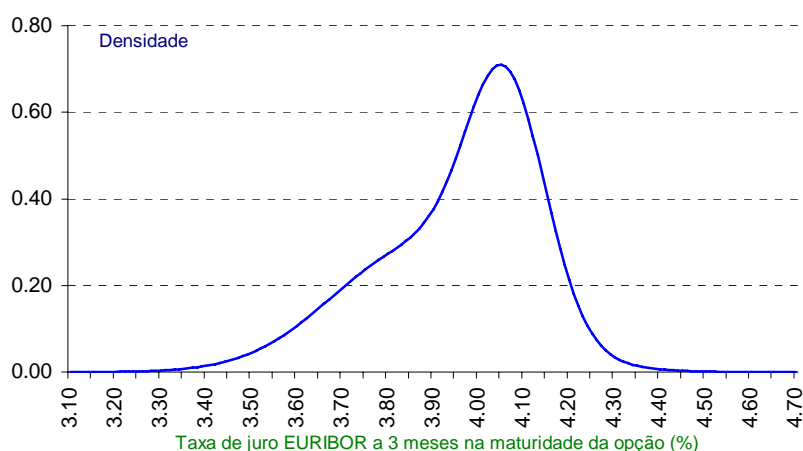
Na sua reunião de 30 de Agosto de 2001, o Conselho do BCE, decidiu reduzir as suas taxas de juro oficiais em 25 p.b., colocando a taxa mínima de proposta das operações principais de refinanciamento em 4.25%, e as taxas das facilidades permanentes de cedência e depósito de liquidez em 5.25% e 3.25%, respectivamente.

A descida em 25 p.b. nas taxas directoras nos Estados Unidos, em 21 de Agosto, a crescente deterioração da economia europeia, conjuntamente com o arrefecimento das pressões inflacionistas pareciam criar espaço para que o BCE procedesse a uma descida nas suas taxas de juro oficiais, como forma de dinamizar a economia, na reunião de 30 Agosto, a primeira após o habitual interregno de Verão do BCE.

Essas expectativas eram corroboradas por uma sondagem da *Reuters* efectuada em 24 de Agosto, na qual 41 de 55 economistas inquiridos partilhavam a opinião de que o BCE iria proceder a um corte nas suas taxas de referência na reunião do Conselho da semana seguinte. A maioria dos entrevistados apontava como provável um corte em 25 p.b., embora existissem no mercado opiniões que defendiam um corte em 50 p.b. Estas expectativas dos agentes estão reflectidas na FDPNR estimada em 24 de Agosto, representada na figura 4.18.

O facto de a média da FDPNR estimada em 24 de Agosto, para Dezembro, se situar cerca de 35 p.b. abaixo da taxa de juro EURIBOR a 3 meses naquela data indiciava, só por si, a expectativa de um futuro corte nas taxas de juro de referência da Zona Euro.

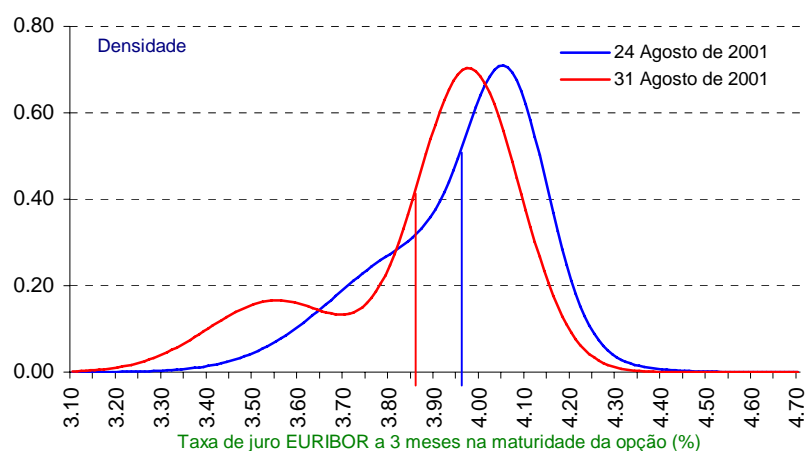
**Figura 4.18:** Função de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 24 de Agosto de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Dezembro de 2001



A figura 4.19 confronta a FDPNR estimada na sexta-feira anterior à alteração de taxas com a FDPNR estimada no dia seguinte à reunião. De uma observação à mesma, verifica-se que a distribuição de probabilidade se manteve relativamente estável, o que pode ser igualmente comprovado através da observação da figura 4.20, existindo apenas uma ligeira revisão das expectativas fruto da confirmação da descida das taxas. Essa correcção é espelhada por um deslocamento para a esquerda massa de probabilidade, que se traduziu numa redução da média, em 9 p.b., da FDPNR estimada em 24 de Agosto face à FDPNR estimada em 31 de Agosto (quadro 4.8). De facto, em 24 de Agosto a média da distribuição era de 3.96%, enquanto que em 31 de Agosto foi de 3.87%. O valor mais provável para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses em Dezembro de 2001, sofreu igualmente uma redução de cerca de 9 p.b., passando de 4.05% para 3.96% em 31 de Agosto. Uma aba esquerda algo pronunciada, em ambas as distribuições, reflecte o facto de o mercado estar a atribuir uma maior probabilidade a uma descida futura das taxas de juro do que a uma eventual subida das mesmas, o que era coerente com uma conjuntura macro-económica internacional algo deprimida.

No que diz respeito à incerteza patente nas expectativas, esta manteve-se com os valores do desvio padrão e o intervalo inter-quartis das FDPNR a permanecerem estáveis, mostrando que continuaram a existir algumas dúvidas quanto ao que a autoridade monetária europeia iria fazer num futuro próximo. O aumento do enviesamento negativo da distribuição, o coeficiente de assimetria passou de -0.50 para -0.90, corrobora igualmente esta ideia.

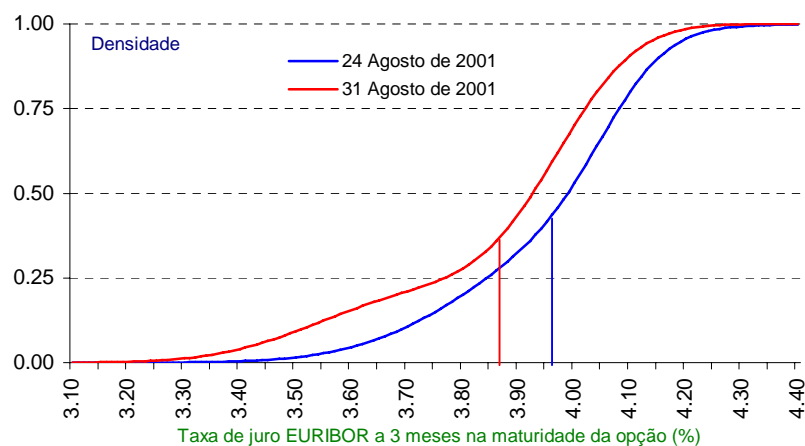
**Figura 4.19:** Funções de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 24 e 31 de Agosto de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Dezembro de 2001



**Quadro 4.8:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 24 e 31 de Agosto de 2001

<i>Estatísticas</i>	<i>24-Ago-01</i>	<i>31-Ago-01</i>
Média	3.96	3.87
Mediana	3.99	3.93
Moda	4.05	3.96
Desvio Padrão	0.1987	0.1939
Q 25%	3.85	3.80
Q 75%	4.08	4.02
Dist. Inter-quartis	0.23	0.22
Assimetria	-0.4993	-0.9016
Kurtosis	1.6239	2.3806

**Figura 4.20:** Funções de distribuição de probabilidade cumulativa neutras ao risco, em 24 e 31 de Agosto de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Dezembro de 2001



#### **4.6 Análise da alteração das expectativas do mercado em resultado dos acontecimentos verificados nos Estados Unidos em 11 de Setembro de 2001 e do corte surpresa efectuado pelo BCE em 17 de Setembro de 2001**

Um episódio recente que ilustra de uma forma perfeita o rápido ajustamento das expectativas do mercado a uma nova conjuntura macro-económica, foi o observado nos dias seguintes aos ataques terroristas ocorridos nos Estados Unidos, em 11 de Setembro de 2001, e à decisão, totalmente inesperada pelo mercado, do BCE, em 17 de Setembro de 2001, em descer as suas taxas directoras em 50 p.b., pela primeira vez fora das suas habituais reuniões quinzenais.

Em 11 de Setembro, os Estados Unidos foram alvo de uma série de atentados terroristas, que vieram exacerbar a fraqueza da economia internacional à data. Sendo que os efeitos directos dos atentados no cômputo geral da economia americana foram relativamente diminutos<sup>68</sup>, o principal risco para o andamento da actividade económica no curto/médio prazo advinha duma possível quebra abrupta da confiança dos agentes económicos decorrente de um aumento da incerteza e insegurança. Num contexto em que a economia se encontrava em fase de pronunciada desaceleração, este choque externo tinha assim todo o potencial para agravar a tendência que se vinha a observar nos últimos meses. Perante este cenário, era extremamente provável que a Federal Reserve (Fed) adoptasse medidas extraordinárias para o relançamento da actividade económica procedendo, nomeadamente, a cortes acentuados das taxas de juro.

Neste contexto, em 17 de Setembro, naquilo que se considera a primeira acção concertada entre o BCE e outros bancos centrais nacionais, a autoridade monetária europeia seguiu a Fed e procedeu a um corte das suas taxas de juro directoras em 50 p.b.. Os bancos centrais do Canadá, Suécia e Suíça tomaram decisões semelhantes, assim como o de Inglaterra e Japão que decidiram reduzir as suas taxas de referência em 25 p.b. e 15 p.b., respectivamente. Se a descida das taxas de juro nos Estados Unidos, era amplamente esperada, pois já antes de 11 de Setembro se especulava quanto à data do próximo corte das taxas, a decisão do BCE apanhou os agentes totalmente de surpresa. Embora se estivesse à espera de uma descida das taxas num futuro próximo, Outubro era apontado como o mês mais provável pelos analistas de mercado, a rapidez com que o BCE agiu e a amplitude do corte surpreenderam totalmente o mercado. Para

---

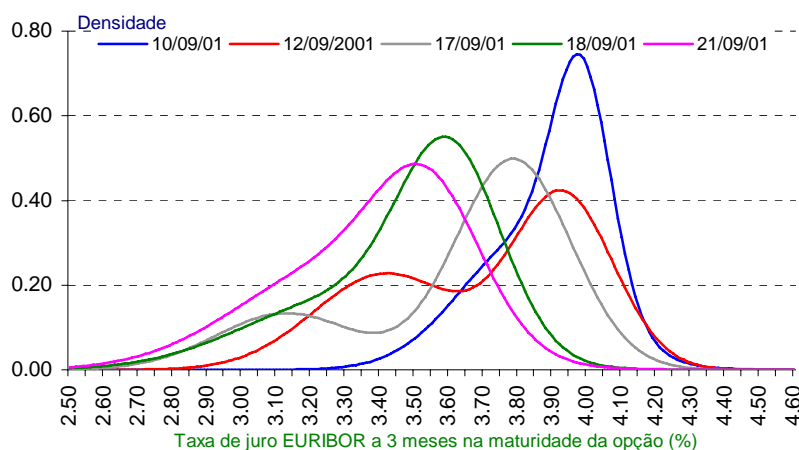
<sup>68</sup> As estimativas efectuadas com base nos montantes das compensações das empresas seguradoras apontam para danos directos na ordem dos 0.5% do PIB norte-americano.

esta situação em muito contribuíram as declarações do próprio presidente do BCE, W. Duisenberg, que antes do anúncio da descida das taxas tinha referido que a decisão da Fed deveria ser interpretada como uma consequência dos acontecimentos nos EUA e não como um sinal de alarme para a economia mundial, levando os agentes a acreditar que o BCE não seguiria passos do seu congénere norte-americano. Porém, tal situação não se verificou, justificando o BCE a redução das taxas de juro como uma actuação apropriada para uma conjuntura extraordinária.

Neste contexto, assistiu-se desde o dia 10 de Setembro, a uma deslocação progressiva para a esquerda da FDPNR relativa a taxa de juro EURIBOR a 3 meses para Dezembro de 2001, que reflectiu o ajustamento/revisão sucessiva das expectativas dos agentes face aos novos cenários que iam surgindo, nomeadamente a um aumento dos receios de um conflito internacional e um acentuar do abrandamento do crescimento económico fruto de uma esperada retracção no relacionamento e comércio mundiais.

A figura 4.21 apresenta uma comparação das FDPNR estimadas para vários dias, durante este período, permitindo-nos visualizar como evoluíram as expectativas dos agentes ao longo do tempo. O quadro 4.9 apresenta as estatísticas referentes às diferentes FDPNR estimadas.

**Figura 4.21:** Funções de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 10, 12, 17, 18 e 21 de Setembro de 2001 para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Dezembro de 2001



**Quadro 4.9:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 10, 12, 17, 18 e 21 de Setembro de 2001

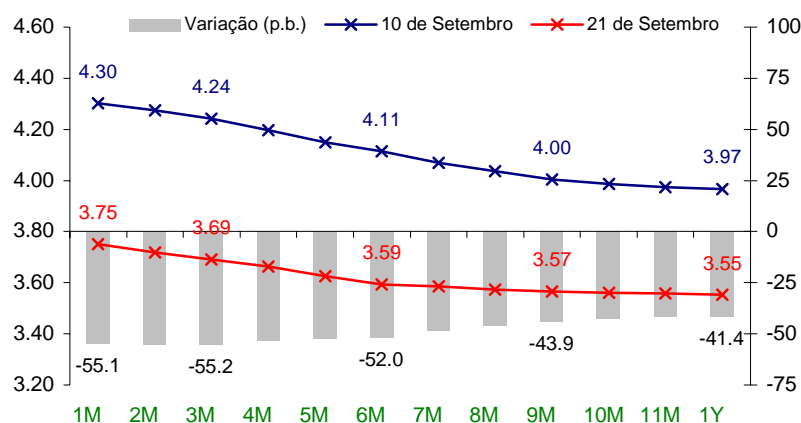
<i>Estatísticas</i>	<i>10-09-2001</i>	<i>12-09-2001</i>	<i>17-09-2001</i>	<i>18-09-2001</i>	<i>21-09-2001</i>
Média	3.89	3.70	3.62	3.48	3.38
Mediana	3.92	3.77	3.72	3.52	3.42
Moda	3.97	3.92	3.79	3.59	3.50
Desvio Padrão	0.2038	0.1310	0.1471	0.1697	0.1596
Q 25%	3.79	3.45	3.45	3.33	3.21
Q 75%	4.01	3.95	3.86	3.66	3.58
Dist. Inter-quartis	0.22	0.50	0.41	0.33	0.37
Assimetria	-0.4011	-1.5089	-1.9486	-0.7846	-0.6603
Kurtosis	2.1247	-0.6378	0.5194	0.2237	-0.5622

A evolução das FDPNR estimadas entre 10 e 21 de Setembro de 2001 ilustra, numa primeira fase, a reacção do mercado aos acontecimentos ocorridos em 11 de Setembro e, posteriormente, o impacto do corte das taxas de juro directoras do BCE em 17 de Setembro. Efectivamente, do dia 10 para dia 12 de Setembro, registou-se um deslocamento da massa de probabilidade para a esquerda, o que significa que os participantes nos mercados reviram em baixa, as suas expectativas em relação à taxa de juro EURIBOR a três meses para Dezembro de 2001. A média da distribuição sofreu uma redução de cerca de 19 p.b., passando de 3.89%, em 10 de Setembro, para 3.70% em 12 de Setembro (quadro 4.9). A revisão em baixa das expectativas foi acompanhada de um aumento da incerteza, justificada pela ausência de informação relativamente ao “*timing*” e à forma com que as autoridades responsáveis iriam responder aos acontecimentos, como atesta a configuração mais alongada da FDPNR em 12 de Setembro e o aumento do intervalo inter-quartis, em cerca de 28 p.b..

Com corte inesperado das taxas de juro, em 17 de Setembro, por parte do BCE, a distribuição da massa de probabilidade voltou a sofrer um forte deslocamento para a esquerda, com o valor mais provável para a taxa de juro EURIBOR em Dezembro de 2001 a registar uma redução significativa, cerca de 33 p.b., passando de 3.92% no dia 12 de Setembro para 3.59% em 18 de Setembro. O corte das taxas traduziu-se igualmente numa redução da incerteza nas expectativas, que se reflectiu numa redução em 17 p.b. do intervalo inter-quartis durante o mesmo período. Entre 10 de Setembro e 21 de Setembro, a média da distribuição de probabilidade relativa à taxa de juro EURIBOR a 3 meses em Dezembro de 2001, sofreu uma redução em 51 p.b., de 3.89% para 3.38%, reflectindo a revisão brusca, em baixa, das expectativas do mercado relativamente as taxas de curto prazo na Zona Euro num futuro próximo, como atesta,

igualmente, a deslocação observada na curva de rendimentos construída com base nas taxas de juro EURIBOR (figura 4.22).

**Figura 4.22:** Curva de rendimentos das taxas de juro EURIBOR em 10 e 21 de Setembro de 2001



Fonte: Reuters

Ao longo de todo o período em análise (de 10 a 21 de Setembro 2001), as FDPNR estimadas apresentaram uma assimetria negativa, evidenciando que o mercado estava a atribuir uma maior probabilidade a futuras descidas das taxas de juro do que a eventuais subidas, facto que estava de acordo com uma economia em fase pronunciada de desaceleração prevendo-se a necessidade de recorrer a novos estímulos monetários para iniciar uma retoma económica. Este facto veio a confirma-se com a redução das taxas de juro de referência do BCE em 50 p.b. na reunião do Conselho de 8 de Novembro de 2001.

#### 4.7 Análise da relação entre a dispersão das FDPNR e o horizonte temporal compreendido entre o momento da estimação e o momento para o qual se refere a distribuição

Uma vez que a data de vencimento de um contrato de opções é fixa, existe uma diminuição da dispersão, da distribuição do preço do um activo subjacente, à medida que o intervalo de tempo até à maturidade se reduz. Por exemplo, no caso do preço do activo apresentar uma distribuição lognormal, verifica-se que o desvio padrão de  $\ln(S_T)$  se reduz em  $\sigma(\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau - 1/365})$ , quando  $t$  aumenta uma unidade de tempo, por exemplo, um dia em períodos expressos em anos. A justificação para a existência deste efeito “tempo” nas distribuições estimadas decorre em grande parte da redução de



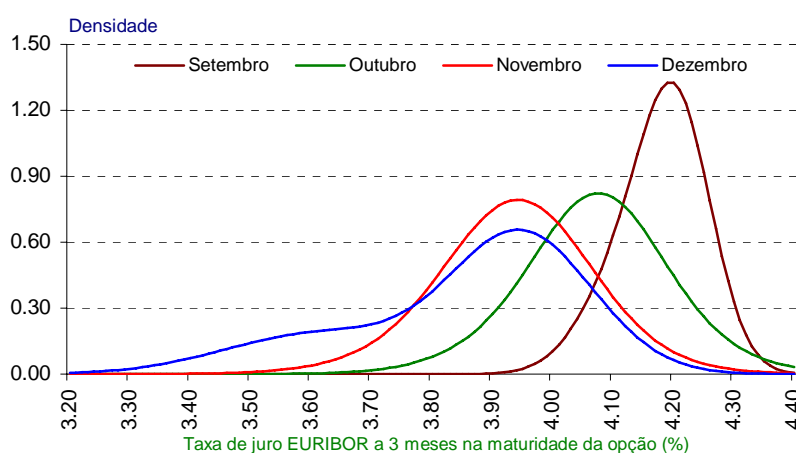
incerteza patente no mercado quanto ao que vai acontecer na data de vencimento da opção, atribuindo o mercado uma probabilidade cada vez menor a realizações extremas da variável em causa.

A existência deste efeito “tempo” nas distribuições estimadas levaria, como já foi referido anteriormente, à necessidade de corrigir as distribuições de acordo com este efeito. Nesse sentido, para datas relativamente distantes, quaisquer conclusões sobre a dispersão das expectativas em momentos diferentes obriga a correcção do desvio padrão pelo efeito “tempo”. No entanto, se a comparação for efectuada entre duas datas relativamente próximas, a correcção será irrelevante podendo ser eventualmente omitida.

Analiseemos então a presença do efeito “tempo” na dispersão das distribuições estimadas com base nas opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses. As FDPNR apresentadas foram estimadas com base numa mistura de duas distribuições lognormais. Foram assim estimadas as distribuições de probabilidade da taxa de juro EURIBOR a 3 meses para os meses de Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro de 2001, em alguns dias do mês de Agosto de 2001. Uma vez que os resultados obtidos da estimação das FDPNR para os diferentes dias eram semelhantes em termos quantitativos, são apenas apresentadas as estimativas efectuadas com base na informação do dia 30 de Agosto.

As FDPNR estimadas no dia 30 de Agosto para as diferentes maturidades estão representadas na figura 4.23, e as respectivas estatísticas no quadro 4.10.

**Figura 4.23:** Funções de densidade de probabilidade neutra ao risco, em 30 de Agosto de 2001, para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro de 2001



**Quadro 4.10:** Estatísticas sumárias das FDPNR estimadas em 30 de Agosto de 2001 para Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro de 2001

<i>Estatísticas</i>	<i>Setembro</i>	<i>Outubro</i>	<i>Novembro</i>	<i>Dezembro</i>
Média	4.18	4.07	3.94	3.86
Mediana	4.18	4.07	3.94	3.89
Moda	4.19	4.08	3.94	3.94
Desvio Padrão	0.3779	0.2711	0.2665	0.2063
Q 25%	4.13	3.99	3.85	3.74
Q 75%	4.23	4.15	4.03	4.00
Dist. Inter-quartis	0.10	0.16	0.18	0.26
Assimetria	-0.0109	0.0002	-0.0312	-0.4997
Kurtosis	2.4332	-0.0434	-0.3261	-0.4538

Da observação da figura 4.23, facilmente se constata um aumento da dispersão das distribuições à medida que aumenta o intervalo temporal, entre a data da estimação e a data para a qual é estimada a FDPNR, como atesta a configuração cada vez mais alongada das distribuições estimadas. Este facto é igualmente corroborado pela medida de dispersão dada pela distância inter-quartis que se apresenta crescente com o aumento do intervalo de tempo até ao momento para a qual é realizada a estimação. Note-se que, à primeira vista, os valores dados pelo desvio padrão parecem não corroborar esta conclusão uma vez que são decrescentes com o intervalo de tempo, no entanto, deve-se ter em atenção que em distribuições fortemente assimétricas como é o nosso caso, a medida de dispersão mais adequada é o intervalo inter-quartis, que ignora os valores extremos ao contrário do desvio padrão, que é fortemente influenciado por estes.

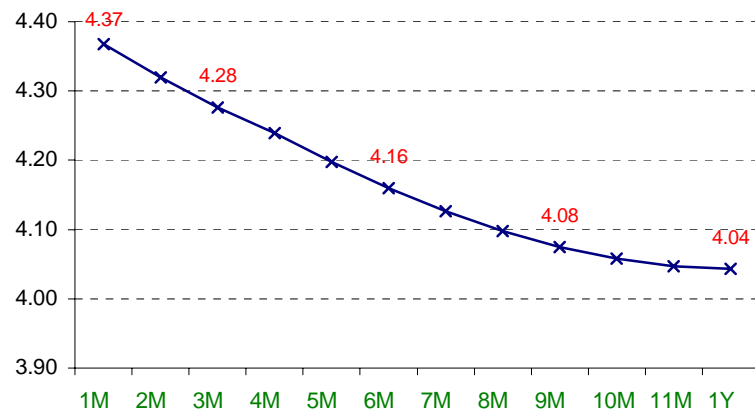
Verifica-se igualmente que a medida de achatamento da distribuição (“*kurtosis*”) é decrescente com o intervalo de tempo até ao momento para a qual é realizada a estimação, concluindo-se assim, que as distribuições se vão tornando mais achatadas, isto é, o mercado vai atribuindo uma maior probabilidade às realizações extremas da variável, à medida que este horizonte temporal aumenta.

Os factos observados justificam-se na medida em que, “*ceteris paribus*”, à medida que o horizonte temporal aumenta, o mercado tem uma maior incerteza em relação ao que irá acontecer no futuro à variável em causa, atribuindo uma maior probabilidade a realizações extremas da variável.

Uma última nota, prende-se com a deslocação para a esquerda das distribuições estimadas à medida que o horizonte temporal aumenta e com o enviesamento negativo evidenciado pelas mesmas. Estes factos estão de acordo com a estrutura temporal das

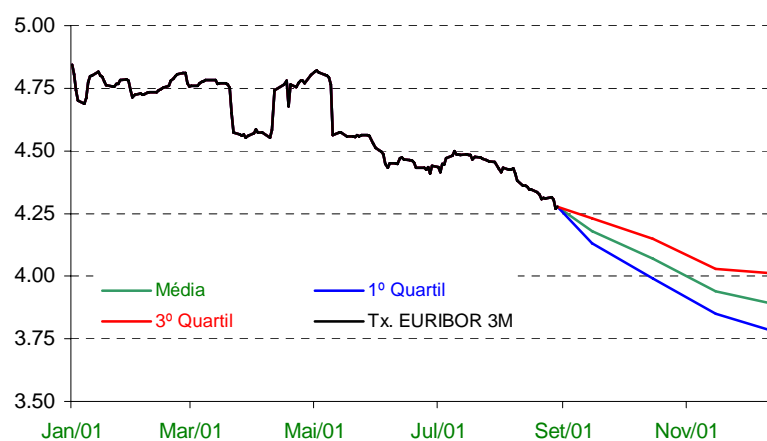
taxas de juro EURIBOR, negativamente inclinada em 30 Agosto, reflectindo que o mercado estaria a antecipar futuras descidas nas taxas de juro de referência do BCE (figura 4.24). Estas expectativas do mercado podem ser observadas, igualmente através da figura 4.25 que mostra a evolução de algumas estatísticas sumárias para as distribuições estimadas.

**Figura 4.24:** Curva de rendimentos das taxas de juro EURIBOR em 30 de Agosto de 2001



Fonte: Reuters

**Figura 4.25:** Taxa de juro EURIBOR a 3 meses e estatísticas sumárias implícitas nas FDPNR para a taxa de juro EURIBOR a 3 meses, em Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro de 2001



## Conclusão

Face à maioria dos activos financeiros, em particular, aos futuros e contratos a prazo, os preços das opções têm a vantagem de permitir caracterizar, de uma forma quase completa, o perfil das expectativas dos agentes relativamente à evolução do preço do activo subjacente.

Neste contexto, as funções de densidade de probabilidade neutras ao risco para o preço dos activos financeiros, implícitas nos preços das opções sobre esses mesmos activos, assumem-se como um instrumento de enorme potencial na extracção dessas expectativas, na medida em que traduzem a distribuição de probabilidade que o mercado atribui aos diferentes cenários para evolução do preço do activo subjacente.

Uma vez que a grande maioria dos preços dos activos financeiros não segue uma distribuição lognormal, em particular os preços das acções e as taxas de câmbio, de acordo com o que é defendido pelo o modelo de Black-Sholes, a utilização de metodologias que permitam uma estimação mais consistente da FDPNR é hoje um assunto que reúne o interesse de um largo conjunto de investigadores económico-financeiros, facto que pode ser constatado pelo elevado número de trabalhos efectuados recentemente nesta área.

No presente trabalho foram apresentadas algumas das técnicas recentes utilizadas na estimação das funções de densidade de probabilidade, suas principais vantagens e desvantagens, fazendo-se igualmente referência a conceitos importantes no âmbito da extracção das expectativas dos preços de opções, como é o caso da curva “*smile*”, da estrutura temporal da volatilidade e dos “*risk reversals*”. Confirmou-se o facto de que também as taxas de juro de curto prazo apresentam distribuições leptocúrticas e assimétricas e se verifica a existência de um “*smile*” no mercado de opções sobre futuros da taxa de juro EURIBOR a 3 meses.

Na análise empírica foram apenas utilizados os métodos que se julgaram poder produzir melhores resultados, tendo sido escolhidos com base nas conclusões de estudos anteriores, informação disponível no mercado e tipo de activo que iria ser analisado. A opção pela estimação das FDPNR a partir de uma mistura de duas distribuições lognormais foi a escolhida dada a capacidade que a mesma tem em captar os mais variados cenários e exigir apenas a estimação de 5 parâmetros.

Da aplicação empírica, efectuada no capítulo 4, ficou patente o potencial que as FDPNR têm no âmbito da extracção e interpretação das expectativas dos agentes que participam nos mercados.

Utilizando prémios de opções transaccionadas na LIFFE sobre o contrato de futuros da taxa EURIBOR a três meses, estimaram-se as FDPNR para a taxa de juro a três meses do Euro, em datas anteriores e posteriores a várias reuniões do Conselho do BCE. Este exercício permitiu concluir que as expectativas vigentes no mercado estão reflectidas nos preços das opções, embora essas expectativas possam não vir a coincidir com a realidade futura. Contudo, verificou-se que, na maioria dos casos, as expectativas de mercado relativamente a alterações das taxas de juro de referência estavam correctas. Nos casos analisados em que o mercado foi total ou parcialmente surpreendido pela autoridade monetária verificou-se um rápido ajustamento das expectativas a nova conjuntura criada, como comprova, por exemplo, a evolução das FDPNR estimadas para o período subsequente aos atentados terroristas ocorridos nos EUA em 11 de Setembro de 2001.

Confirmou-se ainda, a existência, neste tipo de opções, do chamado efeito “tempo” na dispersão das distribuições estimadas. Este efeito está normalmente associado, “ceteris paribus” a uma redução da incerteza no mercado relativamente ao preço do activo subjacente, à medida que se aproxima a data de maturidade das opções.

## Bibliografia

- [1] Aït-Sahalia, Yacine e Lo, Andrew (1998), “Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices”, *Journal of Finance*, 53, pp. 499-547.
- [2] Arrow, K. J. (1964), “The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing”, *Review of Economic Studies*, 31, pp. 91-96.
- [3] Bahra, Bhupinder (1996), “Probability Distributions of Future Asset Prices Implied by Options Prices”, *Bank of England Quarterly Bulletin*, 36, 3, pp. 299-311.
- [4] Bahra, Bhupinder (1997), “Implied Risk-Neutral Probability Density Function from Options Prices: Theory and Application”, Bank of England Working Paper, 66.
- [5] Ball, Clifford A. e Torous, Walter N. (1983), “A Simplified Jump Process for Common Stock Returns”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, pp.53-65.
- [6] Ball, Clifford A. e Torous, Walter N. (1985), “On Jumps in Common Stock Prices and their Impact on Call Option Pricing”, *Journal of Finance*, 40, pp. 155-173.
- [7] Banco Central Europeu (1999), “A Estratégia da Política Monetária do Eurosistema Orientada para a Estabilidade”, Boletim Mensal do BCE, Janeiro.
- [8] Banco Central Europeu (2000), “O Conteúdo Informativo das Taxas de Juro e seus Derivados para a Política Monetária”, Boletim Mensal do BCE, Maio.
- [9] Bates, David S. (1988), “Pricing Options on Jump-Diffusion Processes”, Working Paper, University of Pennsylvania Rodney L. White Center for Financial Research, October, pp. 37-88.
- [10] Bates, David S. (1991), “The Crash of 87: Was it Expected? The Evidence from Options Markets”, *Journal of Finance*, 46, pp. 1009-1049.
- [11] Bates David S. (1996), “Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Process Implicit in Deutsche Mark Options”, *Review of Financial Studies*, 9, pp. 69-107.
- [12] Beckers, S. (1981), “Standard Deviations in Options Prices as Predictors of Future Stock Price Variability”, *Journal of Banking and Finance*, 5, pp. 363-382.

- [13] Bera, A. K. e Matthew L. H (1993), “A Survey of ARCH Models: Properties, Estimation and Testing”, *Journal of Economic Surveys*, vol 7, 4.
- [14] Black, F. e Sholes, M. (1973), “Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.
- [15] Black, F. (1975), “Fact and Fantasy in the Use of Options and Corporate Liabilities”, *Financial Analysis Journal*, 31, pp. 61-72.
- [16] Bliss, R. Robert e Panigirtzoglou, N. (2000), “Testing the Stability of Implied Probability Density Functions”, Bank of England Working Paper, 114.
- [17] Bodarenko, Oleg (2000), “Recovering Risk-Neutral Densities: A New Nonparametric Approach”, Department of Finance, University of Illinois at Chicago.
- [18] Bodurtha, J. N. e Courtadon, G. R. (1987), “Tests of American Options Pricing Model on the Foreign Currency Options Market”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, pp. 153-168.
- [19] Breeden, D. T. e Litzenberger, R. H. (1978), “Prices of State-Contingent Claims Implicit in Options Prices”, *Journal of Business*, 51, pp. 621-651.
- [20] Brigo, Damiano e Mercurio, Fabio (2000), “Implied Volatility: A Mixed-up Smile”, *Risk*, September, pp. 123-126.
- [21] Buchen, P. e Kelly, M. (1996), “The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Options Prices”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, pp. 143-159.
- [22] Campa, J. e Chang, K. (1996), “Arbitrage Based Tests of Target Zone Credibility: Evidence from ERM Cross-Rate Options”, *American Economic Review*, 86, pp.726-740.
- [23] Campa, J.; Chang, K. e Reider, R. L. (1998), “Implied Exchange Rate Distributions: Evidence from OTC Options Markets”, *Journal of International Money and Finance*, 17, N°1, pp. 117-160.

- [24] Campa, J. e Chang, K. (1998) “ERM Realignment Risk and its Economic Determinants as Reflected in Cross-Rate Options”, *Economic Journal*, 108, N°449, pp.1046-1066.
- [25] Campa, J.; Chang, K. e Refalo, J. (1999) “An Options-Based Analysis of Emerging Market Rate Expectations: Brazil’s Real Plan, 1994-1999”, Working Paper, New York University.
- [26] Campbell, John; Lo, Andrew W. e Mackinlay, A. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton.
- [27] Chance, D. M. (1986), “Empirical Tests of the Pricing of Index Call Options”, *Advance in Futures and Options Research*, 1, pp. 141-166.
- [28] Chiras, D. P. e Manaster, S. (1978), “The Information Content of Options Prices and Test of Market Efficiency”, *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 213-234.
- [29] Cooper, Neil (1999), “Testing Techniques for Estimating Implied RNDs from the Prices of European Options”, Bank of England Working Paper.
- [30] Countant, S.; Jondeau, E. e Rockinger, M. (2001), “Reading Interest Rate and Bond Futures Options’ Smiles: How PIBOR and Notional Operators Appreciated the 1997 French Snap Election”, *Journal of Banking and Finance*, 25, pp. 1957-1987.
- [31] Cox, J. e Ross, S. (1976), “The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes”, *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 145-166.
- [32] Day, T. E. e Craig M. L (1993), “Forecasting Futures Market Volatility”, *The Journal of Derivatives*, Winter.
- [33] Debreu, G. (1959), *Theory of Value*, Wiley, New York.
- [34] Derman, E. e Kani, I (1994), “Riding on a Smile”, *Risk*, 7, pp.32-39.
- [35] Derman, E.; Kani, I e Chriss, N. (1996), “Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile”, *Journal of Derivatives*, 3, pp. 7-22.
- [36] Elton, E., Gruber, M. (1995), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, New York.



- [37] Gemmill, Gordon e Saflekos, Apostolos (2000), “How Useful are Implied Distributions from Stock-Index Options”, *The Journal of Derivatives*, Spring.
- [38] Harrison, J. e Kreps, David (1979), “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets”, *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 381-408.
- [39] Hördahl, Peter (2000), “Estimating the Implied Distribution of the Future Short Term Interest Rate Using the Longstaff-Schwartz Model”, European Central Bank, Working Paper Series.
- [40] Hull, John C. (1998), *Introduction to Futures and Options Markets*, Prentice-Hall International, New Jersey.
- [41] Jackwerth, J. C. e Rubinstein, M. (1996), “ Recovering Probability Distributions from Options Prices”, *Journal of Finance*, 51, pp. 1611-1631.
- [42] Jackwerth, J. C. (1999), “Option-implied Risk-Neutral Distributions and Implied Binomial Trees: A Literature Review”, *Journal of Derivatives*, Winter, pp. 66-82.
- [43] Jarrow, R. e Rudd, Andrew (1983), *Option Pricing*, Dow Jones-Irwin, Homewood.
- [44] Jarrow, R. (1996), *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, McGraw-Hill.
- [45] Jarrow, R. (1998), *Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives*, Risk Books, London.
- [46] Jondeau, E. e Rockinger, M. (1998), “Reading the Smile: The Message Conveyed by Methods Which Infer Risk Neutral Densities”, Working Paper, HEC.
- [47] Latané, H. e Rendleman, R. J. (1976), “ Standard Deviation of Stock Price Ratios Implied by Option Premia”, *Journal of Finance*, 31, pp. 369-382.
- [48] Larson, H. (1982), *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*, Third Edition, Wiley.
- [49] Leahy, M. P. e Thomas, C. P. (1996), “The Sovereignty Option: The Quebec Referendum and Market Views on the Canadian Dollar”, International Finance Discussion Paper, 555, Board of Governors of the Federal Reserve System.

- [50] LIFFE (1999), “LIFFE Short-Term Interest Rate Future and Options”, London.
- [51] Longstaff, F. (1995), “Option Pricing and the Martingale Restriction”, *Review of Financial Studies*, 8, pp. 1091-1124
- [52] MacBeth, J. D. e Merville, L. J. (1979), “An Empirical Examination of the Black-Sholes Call Option Pricing Model”, *Journal of Finance*, 34, pp.1172-1186.
- [53] Malz, A. M. (1995), “Using Option Prices to Estimate Realignment Probabilities in the European Monetary System”, Federal Reserve Bank of New York Staff Reports, 5.
- [54] Malz, A. M. (1997a), “Estimating the Probability Distribution of Future Exchange Rate from Options Prices”, *Journal of Derivatives*, Winter, pp.18-36.
- [55] Malz, A. M. (1997b), “Option-Implied Probability Distributions and Currency Excess Returns”, Federal Reserve Bank of New York Staff Reports, 32.
- [56] Manzano, Maria e Sánchez, Isabel (1998), “Indicators of Short-Term Interest Rate Expectations: The Information Contained in the Options Market”, Banco de España, Servicio de Estudios.
- [57] McManus, Des J. (1999), “The Information Content of Interest Rate Futures Options”. Working Paper, 99, Bank of Canada.
- [58] Melick, W. R. e Thomas, C. P. (1997), Recovering an Asset’s Implied PDF from Options Prices: an Application to Crude Oil During the Gulf Crisis”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, pp 91-115.
- [59] Mizrach, B. (1996), “Did Options Prices Predict the ERM Crisis?”, Working Paper, Rutgers University.
- [60] Nakamura, Hisashi e Shiratsuka, Shigenori (1999), “Extracting Market Expectations From Options Prices: Case Studies in Japanese Option Markets”, Bank of Japan.
- [61] Neuhaus, Holger (1995), “The Information Content of Derivatives for Monetary Policy”, Discussion Paper 3/95, Economic Research Group of the Deutsche Bundesbank.

- [62] Ritchey, R. (1990), "Call Option Valuation for Discrete Normal Mixtures", *Journal of Financial Research*, 13, pp. 285-295.
- [63] Ross, S. (1976), "Options and Efficiency", *Quarterly Journal of Economics*, 90, pp. 75-89.
- [64] Rubinstein, M. (1994), "Implied Binomial Trees", *Journal of Finance*, 49, pp. 771-818.
- [65] Panigirtzoglou N.; Roger C. e James P. (2000), "Recent Developments in Extracting Information from Options Markets", *Bank of England Quarterly Bulletin*, pp. 50-60.
- [66] Shastri, K. e Tandon, K. (1986), "An Empirical Test of Valuation Model for American Options on Futures Contracts", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21, pp. 377-392.
- [67] Shimko, D. (1993), "Bounds on Probability", *Risk*, 6, pp. 275-290
- [68] Söderlind, Paul (1998), "Extracting Expectations About 1992 UK Monetary Policy From Options Prices", Discussion Paper Series, 1823, CEPR.
- [69] Söderlind, Paul e Svensson, L.E.O. (1998): "New Techniques to Extract Market Expectations From Financial Instruments", *Journal of Monetary Economics*, 40, October, pp. 383-429.
- [70] Toft, K. e Prucyk, B. (1997), "Options on Leveraged Equity: Theory and Empirical Tests", *Journal of Finance*, 52, pp.1151-1180.
- [71] Tompkins, R., (1998), "Implied Volatility Surfaces: Uncovering the Regularities for Options on Financial Futures", Working paper, Vienna University of Technology and Warwick University.
- [72] Whaley, R. E. (1982), "Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks: Empirical Tests", *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 29-58.

## **Anexo - Informação Utilizada**

## Informação relativa ao dia 28 de Abril de 2000

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
JUN00	M	95.755

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
0.755	13.00	-1.00	JUN00	95000	0	13.00	0.00
0.630	13.00	-1.00	JUN00	95125	0	13.00	0.00
0.505	13.00	-0.99	JUN00	95250	0	13.00	0.01
0.385	13.74	-0.95	JUN00	95375	0.005	13.74	0.05
0.270	13.23	-0.87	JUN00	95500	0.015	13.23	0.13
0.155	10.58	-0.77	JUN00	95625	0.025	10.58	0.23
0.070	10.32	-0.50	JUN00	95750	0.065	10.32	0.50
0.020	9.33	-0.20	JUN00	95875	0.140	9.33	0.80
0.005	11.25	-0.08	JUN00	96000	0.250	11.25	0.92
0	12.85	-0.03	JUN00	96125	0.370	12.85	0.97

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
SEP00	U	95.475

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
1.475	14.48	-1.00	SEP00	94000	0	14.48	0.00
1.350	14.48	-1.00	SEP00	94125	0	14.48	0.00
1.225	14.48	-1.00	SEP00	94250	0	14.48	0.00
1.100	14.48	-0.99	SEP00	94375	0	14.48	0.01
0.980	14.48	-0.98	SEP00	94500	0.005	14.48	0.02
0.855	14.31	-0.97	SEP00	94625	0.005	14.31	0.03
0.735	14.18	-0.95	SEP00	94750	0.010	14.18	0.05
0.615	13.55	-0.92	SEP00	94875	0.015	13.55	0.08
0.495	13.02	-0.88	SEP00	95000	0.020	13.02	0.12
0.385	12.68	-0.81	SEP00	95125	0.035	12.68	0.19
0.280	12.15	-0.72	SEP00	95250	0.055	12.15	0.28
0.195	12.18	-0.60	SEP00	95375	0.095	12.18	0.40
0.125	12.23	-0.46	SEP00	95500	0.150	12.23	0.54
0.075	12.34	-0.32	SEP00	95625	0.225	12.34	0.68
0.040	12.55	-0.20	SEP00	95750	0.315	12.55	0.80
0.020	12.68	-0.11	SEP00	95875	0.420	12.68	0.89
0.010	13.52	-0.07	SEP00	96000	0.535	13.52	0.93
0.005	14.50	-0.04	SEP00	96125	0.655	14.50	0.96

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
DEC00	Z	95.230

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
5.230	14.00	-1.00	DEC00	90000	0	14.00	0.00
4.980	14.00	-1.00	DEC00	90250	0	14.00	0.00
4.730	14.00	-1.00	DEC00	90500	0	14.00	0.00
4.480	14.00	-1.00	DEC00	90750	0	14.00	0.00

4.230	14.00	-1.00	DEC00	91000	0	14.00	0.00
3.980	14.00	-1.00	DEC00	91250	0	14.00	0.00
3.730	14.00	-1.00	DEC00	91500	0	14.00	0.00
3.480	14.00	-1.00	DEC00	91750	0	14.00	0.00
3.230	14.00	-1.00	DEC00	92000	0	14.00	0.00
2.980	14.00	-1.00	DEC00	92250	0	14.00	0.00
2.730	14.00	-1.00	DEC00	92500	0	14.00	0.00
2.480	14.00	-1.00	DEC00	92750	0	14.00	0.00
2.230	16.27	-1.00	DEC00	93000	0	16.27	0.00
1.980	16.27	-1.00	DEC00	93250	0	16.27	0.00
1.730	16.39	-0.99	DEC00	93500	0	16.39	0.01
1.485	17.08	-0.97	DEC00	93750	0.005	17.08	0.03
1.240	16.50	-0.95	DEC00	94000	0.010	16.50	0.05
1.000	16.10	-0.92	DEC00	94250	0.020	16.10	0.08
0.770	15.23	-0.87	DEC00	94500	0.040	15.23	0.13
0.550	14.62	-0.78	DEC00	94750	0.070	14.62	0.22
0.350	13.90	-0.64	DEC00	95000	0.120	13.90	0.36
0.200	13.78	-0.46	DEC00	95250	0.220	13.78	0.54
0.100	14.03	-0.28	DEC00	95500	0.370	14.03	0.72
0.045	14.41	-0.15	DEC00	95750	0.565	14.41	0.85
0.020	15.46	-0.07	DEC00	96000	0.790	15.46	0.93
0.010	16.70	-0.03	DEC00	96250	1.030	16.70	0.97
0.005	18.19	-0.01	DEC00	96500	1.275	18.19	0.99
0	16.30	0.00	DEC00	96750	1.520	16.30	1.00
0	16.30	0.00	DEC00	97000	1.770	16.30	1.00
0	16.30	0.00	DEC00	97250	2.020	16.30	1.00
0	16.30	0.00	DEC00	97500	2.270	16.30	1.00
0	16.30	0.00	DEC00	97750	2.520	16.30	1.00
0	16.30	0.00	DEC00	98000	2.770	16.30	1.00
0	16.30	0.00	DEC00	98250	3.020	16.30	1.00
0	16.30	0.00	DEC00	98500	3.270	16.30	1.00
0	16.30	0.00	DEC00	98750	3.520	16.30	1.00

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
MAR01	H	95.150

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5.150	16.04	-1.00	MAR01	90000	0	16.04	0.00
4.900	16.04	-1.00	MAR01	90250	0	16.04	0.00
4.650	16.04	-1.00	MAR01	90500	0	16.04	0.00
4.400	16.04	-1.00	MAR01	90750	0	16.04	0.00
4.150	16.04	-1.00	MAR01	91000	0	16.04	0.00
3.900	16.04	-1.00	MAR01	91250	0	16.04	0.00
3.650	16.04	-1.00	MAR01	91500	0	16.04	0.00
3.400	16.04	-1.00	MAR01	91750	0	16.04	0.00
3.150	16.04	-1.00	MAR01	92000	0	16.04	0.00
2.900	16.21	-1.00	MAR01	92250	0	16.21	0.00
2.650	16.21	-1.00	MAR01	92500	0	16.21	0.00
2.400	16.21	-0.99	MAR01	92750	0	16.21	0.01
2.150	16.21	-0.99	MAR01	93000	0	16.21	0.01
1.905	16.82	-0.98	MAR01	93250	0.005	16.82	0.02
1.660	16.96	-0.96	MAR01	93500	0.010	16.96	0.04
1.420	16.52	-0.94	MAR01	93750	0.020	16.52	0.06
1.180	16.07	-0.91	MAR01	94000	0.030	16.07	0.09
0.950	15.95	-0.85	MAR01	94250	0.050	15.95	0.15
0.735	15.69	-0.78	MAR01	94500	0.085	15.69	0.22
0.540	15.69	-0.68	MAR01	94750	0.140	15.69	0.32
0.370	15.51	-0.55	MAR01	95000	0.220	15.51	0.45
0.230	15.24	-0.41	MAR01	95250	0.330	15.24	0.59
0.130	15.17	-0.28	MAR01	95500	0.480	15.17	0.72
0.065	15.34	-0.16	MAR01	95750	0.665	15.34	0.84
0.030	16.01	-0.09	MAR01	96000	0.880	16.01	0.91
0.015	17.16	-0.05	MAR01	96250	1.115	17.16	0.95

0.005	17.58	-0.02	MAR01	96500	1.355	17.58	0.98
0	17.51	-0.01	MAR01	96750	1.600	17.51	0.99
0	17.50	0.00	MAR01	97000	1.850	17.50	1.00
0	17.50	0.00	MAR01	97250	2.100	17.50	1.00
0	17.50	0.00	MAR01	97500	2.350	17.50	1.00
0	17.50	0.00	MAR01	97750	2.600	17.50	1.00
0	17.50	0.00	MAR01	98000	2.850	17.50	1.00
0	17.50	0.00	MAR01	98250	3.100	17.50	1.00

## Informação relativa ao dia 2 de Junho de 2000

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
SEP00	U	95.235

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1.985	14.05	-1.00	SEP00	93250	0	14.05	0.00
1.860	14.05	-1.00	SEP00	93375	0	14.05	0.00
1.735	14.05	-1.00	SEP00	93500	0	14.05	0.00
1.610	14.05	-1.00	SEP00	93625	0	14.05	0.00
1.485	14.05	-1.00	SEP00	93750	0	14.05	0.00
1.360	14.05	-1.00	SEP00	93875	0	14.05	0.00
1.235	14.05	-1.00	SEP00	94000	0	14.05	0.00
1.110	14.05	-1.00	SEP00	94125	0	14.05	0.00
0.985	13.96	-0.99	SEP00	94250	0	13.96	0.01
0.860	14.22	-0.98	SEP00	94375	0	14.22	0.02
0.740	14.61	-0.96	SEP00	94500	0.005	14.61	0.04
0.620	14.54	-0.93	SEP00	94625	0.010	14.54	0.07
0.505	14.27	-0.89	SEP00	94750	0.020	14.27	0.11
0.395	13.98	-0.82	SEP00	94875	0.035	13.98	0.18
0.290	13.69	-0.73	SEP00	95000	0.055	13.69	0.27
0.205	13.43	-0.61	SEP00	95125	0.095	13.43	0.39
0.130	13.32	-0.47	SEP00	95250	0.145	13.32	0.53
0.075	13.30	-0.33	SEP00	95375	0.215	13.30	0.67
0.040	13.45	-0.21	SEP00	95500	0.305	13.45	0.79
0.020	13.77	-0.12	SEP00	95625	0.410	13.77	0.88
0.010	14.34	-0.07	SEP00	95750	0.525	14.34	0.93
0.005	14.67	-0.03	SEP00	95875	0.645	14.67	0.97
0	14.81	-0.01	SEP00	96000	0.765	14.81	0.99
0	14.86	0.00	SEP00	96125	0.890	14.86	1.00
0	14.81	0.00	SEP00	96250	1.015	14.81	1.00
0	14.76	0.00	SEP00	96375	1.140	14.76	1.00
0	14.71	0.00	SEP00	96500	1.265	14.71	1.00
0	14.71	0.00	SEP00	96625	1.390	14.71	1.00
0	14.71	0.00	SEP00	96750	1.515	14.71	1.00

## Informação relativa ao dia 4 de Maio de 2000

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
SEP01	U	95.495

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1.745	13.55	-1.00	SEP01	93750	0	13.55	0.00

1.620	13.55	-1.00	SEP01	93875	0	13.55	0.00
1.495	13.55	-1.00	SEP01	94000	0	13.55	0.00
1.370	13.79	-1.00	SEP01	94125	0	13.79	0.00
1.245	13.79	-1.00	SEP01	94250	0	13.79	0.00
1.120	13.96	-0.99	SEP01	94375	0	13.96	0.01
0.995	13.86	-0.99	SEP01	94500	0	13.86	0.01
0.875	13.83	-0.98	SEP01	94625	0.005	13.83	0.02
0.750	13.88	-0.96	SEP01	94750	0.005	13.88	0.04
0.630	13.98	-0.93	SEP01	94875	0.010	13.98	0.07
0.515	14.02	-0.88	SEP01	95000	0.020	14.02	0.12
0.410	14.10	-0.81	SEP01	95125	0.040	14.10	0.19
0.315	14.30	-0.71	SEP01	95250	0.070	14.30	0.29
0.230	14.73	-0.60	SEP01	95375	0.110	14.73	0.40
0.165	15.40	-0.48	SEP01	95500	0.170	15.40	0.52
0.115	16.07	-0.36	SEP01	95625	0.245	16.07	0.64
0.080	16.67	-0.27	SEP01	95750	0.335	16.67	0.73
0.055	17.45	-0.19	SEP01	95875	0.435	17.45	0.81
0.035	18.39	-0.13	SEP01	96000	0.540	18.39	0.87
0.025	19.18	-0.09	SEP01	96125	0.655	19.18	0.91
0.015	20.16	-0.06	SEP01	96250	0.770	20.16	0.94
0.010	20.84	-0.04	SEP01	96375	0.890	20.84	0.96
0.005	21.16	-0.02	SEP01	96500	1.010	21.16	0.98
0	21.10	-0.01	SEP01	96625	1.130	21.10	0.99
0	21.10	0.00	SEP01	96750	1.255	21.10	1.00
0	21.10	0.00	SEP01	96875	1.380	21.10	1.00
0	21.10	0.00	SEP01	97000	1.505	21.10	1.00
0	21.10	0.00	SEP01	97125	1.630	21.10	1.00
0	21.10	0.00	SEP01	97250	1.755	21.10	1.00

## Informação relativa ao dia 15 de Maio de 2001

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
SEP01	U	95.740

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1.990	11.53	-1.00	SEP01	93750	0	11.53	0.00
1.865	11.53	-1.00	SEP01	93875	0	11.53	0.00
1.740	11.53	-1.00	SEP01	94000	0	11.53	0.00
1.615	11.77	-1.00	SEP01	94125	0	11.77	0.00
1.490	11.77	-1.00	SEP01	94250	0	11.77	0.00
1.365	11.94	-1.00	SEP01	94375	0	11.94	0.00
1.240	11.84	-1.00	SEP01	94500	0	11.84	0.00
1.115	11.81	-1.00	SEP01	94625	0	11.81	0.00
0.990	11.86	-1.00	SEP01	94750	0	11.86	0.00
0.865	11.80	-1.00	SEP01	94875	0	11.80	0.00
0.740	12.04	-0.99	SEP01	95000	0	12.04	0.01
0.620	12.04	-0.97	SEP01	95125	0.005	12.04	0.03
0.500	12.44	-0.93	SEP01	95250	0.010	12.44	0.07
0.385	12.71	-0.86	SEP01	95375	0.020	12.71	0.14
0.290	13.23	-0.75	SEP01	95500	0.050	13.23	0.25
0.205	14.11	-0.61	SEP01	95625	0.090	14.11	0.39
0.145	14.87	-0.47	SEP01	95750	0.155	14.87	0.53
0.090	15.36	-0.34	SEP01	95875	0.225	15.36	0.66
0.055	15.86	-0.23	SEP01	96000	0.315	15.86	0.77
0.035	16.75	-0.15	SEP01	96125	0.420	16.75	0.85
0.020	17.72	-0.10	SEP01	96250	0.530	17.72	0.90
0.010	18.31	-0.06	SEP01	96375	0.645	18.31	0.94
0.005	18.56	-0.03	SEP01	96500	0.765	18.56	0.97
0	18.66	-0.01	SEP01	96625	0.885	18.66	0.99
0	18.76	-0.01	SEP01	96750	1.010	18.76	0.99
0	18.76	0.00	SEP01	96875	1.135	18.76	1.00



0	18.76	0.00	SEP01	97000	1.260	18.76	1.00
0	18.76	0.00	SEP01	97125	1.385	18.76	1.00
0	18.76	0.00	SEP01	97250	1.510	18.76	1.00

## Informação relativa ao dia 9 de Junho de 2000

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
SEP00	U	95.130

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS				PUTS			
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1.880	13.40	-1.00	SEP00	93250	0	13.40	0.00
1.755	13.40	-1.00	SEP00	93375	0	13.40	0.00
1.630	13.40	-1.00	SEP00	93500	0	13.40	0.00
1.505	13.40	-1.00	SEP00	93625	0	13.40	0.00
1.380	13.40	-1.00	SEP00	93750	0	13.40	0.00
1.255	13.40	-1.00	SEP00	93875	0	13.40	0.00
1.130	13.40	-1.00	SEP00	94000	0	13.40	0.00
1.005	13.40	-1.00	SEP00	94125	0	13.40	0.00
0.880	13.31	-0.99	SEP00	94250	0	13.31	0.01
0.760	13.57	-0.98	SEP00	94375	0.005	13.57	0.02
0.640	13.96	-0.95	SEP00	94500	0.010	13.96	0.05
0.520	14.04	-0.90	SEP00	94625	0.015	14.04	0.10
0.410	13.67	-0.84	SEP00	94750	0.030	13.67	0.16
0.305	13.26	-0.76	SEP00	94875	0.050	13.26	0.24
0.210	12.86	-0.64	SEP00	95000	0.080	12.86	0.36
0.135	12.66	-0.49	SEP00	95125	0.130	12.66	0.51
0.075	12.42	-0.34	SEP00	95250	0.195	12.42	0.66
0.040	12.44	-0.21	SEP00	95375	0.285	12.44	0.79
0.020	12.86	-0.12	SEP00	95500	0.390	12.86	0.88
0.010	13.33	-0.06	SEP00	95625	0.505	13.33	0.94
0.005	13.80	-0.03	SEP00	95750	0.625	13.80	0.97
0	13.98	-0.01	SEP00	95875	0.745	13.98	0.99
0	14.13	0.00	SEP00	96000	0.870	14.13	1.00
0	14.21	0.00	SEP00	96125	0.995	14.21	1.00
0	14.16	0.00	SEP00	96250	1.120	14.16	1.00
0	14.11	0.00	SEP00	96375	1.245	14.11	1.00
0	14.06	0.00	SEP00	96500	1.370	14.06	1.00
0	14.06	0.00	SEP00	96625	1.495	14.06	1.00
0	14.06	0.00	SEP00	96750	1.620	14.06	1.00

## Informação relativa ao dia 24 de Agosto de 2001

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
DEC01	Z	96.035

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS				PUTS			
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1.785	13.54	-1.00	DEC01	94250	0	13.54	0.00
1.660	13.54	-1.00	DEC01	94375	0	13.54	0.00

1.535	13.54	-1.00	DEC01	94500	0	13.54	0.00
1.410	13.54	-1.00	DEC01	94625	0	13.54	0.00
1.285	13.64	-1.00	DEC01	94750	0	13.64	0.00
1.160	13.68	-1.00	DEC01	94875	0	13.68	0.00
1.035	13.66	-1.00	DEC01	95000	0	13.66	0.00
0.910	13.65	-1.00	DEC01	95125	0	13.65	0.00
0.785	13.97	-0.99	DEC01	95250	0	13.97	0.01
0.665	14.05	-0.97	DEC01	95375	0.005	14.05	0.03
0.545	14.28	-0.94	DEC01	95500	0.010	14.28	0.06
0.430	14.40	-0.88	DEC01	95625	0.020	14.40	0.12
0.320	14.43	-0.79	DEC01	95750	0.035	14.43	0.21
0.225	14.53	-0.67	DEC01	95875	0.065	14.53	0.33
0.150	14.95	-0.52	DEC01	96000	0.115	14.95	0.48
0.095	15.61	-0.38	DEC01	96125	0.185	15.61	0.62
0.060	16.43	-0.26	DEC01	96250	0.275	16.43	0.74
0.035	17.08	-0.16	DEC01	96375	0.375	17.08	0.84
0.020	17.81	-0.10	DEC01	96500	0.485	17.81	0.90
0.010	18.66	-0.06	DEC01	96625	0.600	18.66	0.94
0.005	19.22	-0.03	DEC01	96750	0.720	19.22	0.97
0	19.59	-0.01	DEC01	96875	0.840	19.59	0.99
0	19.59	0.00	DEC01	97000	0.965	19.59	1.00
0	19.53	0.00	DEC01	97125	1.090	19.53	1.00
0	19.53	0.00	DEC01	97250	1.215	19.53	1.00
0	19.73	0.00	DEC01	97375	1.340	19.73	1.00
0	19.73	0.00	DEC01	97500	1.465	19.73	1.00
0	19.73	0.00	DEC01	97625	1.590	19.73	1.00
0	19.73	0.00	DEC01	97750	1.715	19.73	1.00

## Informação relativa ao dia 30 de Agosto de 2001

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
SEP01	U	95.820

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1.320	7.75	-1.00	SEP01	94500	0	7.75	0.00
1.195	7.75	-1.00	SEP01	94625	0	7.75	0.00
1.070	7.75	-1.00	SEP01	94750	0	7.75	0.00
0.945	7.75	-1.00	SEP01	94875	0	7.75	0.00
0.820	7.74	-1.00	SEP01	95000	0	7.74	0.00
0.695	7.73	-1.00	SEP01	95125	0	7.73	0.00
0.570	7.73	-1.00	SEP01	95250	0	7.73	0.00
0.445	7.83	-1.00	SEP01	95375	0	7.83	0.00
0.320	7.84	-1.00	SEP01	95500	0	7.84	0.00
0.195	7.85	-0.99	SEP01	95625	0	7.85	0.01
0.075	7.87	-0.82	SEP01	95750	0.005	7.87	0.18
0.010	8.72	-0.25	SEP01	95875	0.065	8.72	0.75
0	9.73	-0.02	SEP01	96000	0.180	9.73	0.98
0	9.69	0.00	SEP01	96125	0.305	9.69	1.00
0	9.69	0.00	SEP01	96250	0.430	9.69	1.00
0	9.72	0.00	SEP01	96375	0.555	9.72	1.00
0	9.70	0.00	SEP01	96500	0.680	9.70	1.00
0	9.68	0.00	SEP01	96625	0.805	9.68	1.00
0	9.68	0.00	SEP01	96750	0.930	9.68	1.00
0	9.68	0.00	SEP01	96875	1.055	9.68	1.00
0	9.65	0.00	SEP01	97000	1.180	9.65	1.00
0	9.64	0.00	SEP01	97125	1.305	9.64	1.00

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
OCT01	V	95.925

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
1.635	12.91	-1.00	OCT01	94500	0	12.91	0.00
1.510	12.91	-1.00	OCT01	94625	0	12.91	0.00
1.385	12.91	-1.00	OCT01	94750	0	12.91	0.00
1.260	12.91	-1.00	OCT01	94875	0	12.91	0.00
1.135	12.91	-1.00	OCT01	95000	0	12.91	0.00
1.010	12.81	-1.00	OCT01	95125	0	12.81	0.00
0.885	12.81	-1.00	OCT01	95250	0	12.81	0.00
0.760	12.81	-1.00	OCT01	95375	0	12.81	0.00
0.635	12.90	-1.00	OCT01	95500	0	12.90	0.00
0.510	12.97	-1.00	OCT01	95625	0	12.97	0.00
0.385	13.02	-0.98	OCT01	95750	0	13.02	0.02
0.265	13.23	-0.91	OCT01	95875	0.005	13.23	0.09
0.165	13.98	-0.75	OCT01	96000	0.030	13.98	0.25
0.085	14.74	-0.51	OCT01	96125	0.075	14.74	0.49
0.040	15.42	-0.28	OCT01	96250	0.155	15.42	0.72
0.015	16.34	-0.13	OCT01	96375	0.255	16.34	0.87
0.005	17.08	-0.05	OCT01	96500	0.370	17.08	0.95
0	17.46	-0.01	OCT01	96625	0.490	17.46	0.99
0	17.46	0.00	OCT01	96750	0.615	17.46	1.00
0	17.51	0.00	OCT01	96875	0.740	17.51	1.00
0	17.53	0.00	OCT01	97000	0.865	17.53	1.00
0	17.50	0.00	OCT01	97125	0.990	17.50	1.00

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
NOV01	X	96.060

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
1.635	13.00	-1.00	NOV01	94500	0	13.00	0.00
1.510	13.00	-1.00	NOV01	94625	0	13.00	0.00
1.385	13.00	-1.00	NOV01	94750	0	13.00	0.00
1.260	13.01	-1.00	NOV01	94875	0	13.01	0.00
1.135	12.98	-1.00	NOV01	95000	0	12.98	0.00
1.010	12.98	-1.00	NOV01	95125	0	12.98	0.00
0.885	13.00	-1.00	NOV01	95250	0	13.00	0.00
0.760	13.00	-1.00	NOV01	95375	0	13.00	0.00
0.635	13.15	-0.99	NOV01	95500	0	13.15	0.01
0.510	13.37	-0.97	NOV01	95625	0	13.37	0.03
0.395	13.58	-0.93	NOV01	95750	0.010	13.58	0.07
0.280	13.83	-0.83	NOV01	95875	0.020	13.83	0.17
0.185	14.17	-0.68	NOV01	96000	0.050	14.17	0.32
0.110	14.61	-0.50	NOV01	96125	0.100	14.61	0.50
0.060	15.19	-0.32	NOV01	96250	0.175	15.19	0.68
0.030	15.80	-0.19	NOV01	96375	0.270	15.80	0.81
0.015	16.52	-0.10	NOV01	96500	0.380	16.52	0.90
0.005	16.98	-0.04	NOV01	96625	0.495	16.98	0.96
0	17.17	-0.01	NOV01	96750	0.615	17.17	0.98
0	17.17	0.00	NOV01	96875	0.740	17.17	1.00
0	17.19	0.00	NOV01	97000	0.865	17.19	1.00
0	17.21	0.00	NOV01	97125	0.990	17.21	1.00

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
DEC01	Z	96.135

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
1.635	12.32	-1.00	DEC01	94500	0	12.32	0.00
1.510	12.32	-1.00	DEC01	94625	0	12.32	0.00
1.385	12.32	-1.00	DEC01	94750	0	12.32	0.00
1.260	12.32	-1.00	DEC01	94875	0	12.32	0.00
1.135	12.35	-1.00	DEC01	95000	0	12.35	0.00
1.010	12.39	-1.00	DEC01	95125	0	12.39	0.00
0.885	12.46	-1.00	DEC01	95250	0	12.46	0.00
0.760	12.64	-0.99	DEC01	95375	0	12.64	0.01
0.635	12.97	-0.98	DEC01	95500	0	12.97	0.02
0.515	13.24	-0.95	DEC01	95625	0.005	13.24	0.05
0.400	13.33	-0.90	DEC01	95750	0.015	13.33	0.10
0.290	13.48	-0.80	DEC01	95875	0.030	13.48	0.20
0.200	13.75	-0.66	DEC01	96000	0.065	13.75	0.34
0.125	14.06	-0.50	DEC01	96125	0.115	14.06	0.50
0.075	14.73	-0.34	DEC01	96250	0.190	14.73	0.66
0.040	15.53	-0.21	DEC01	96375	0.280	15.53	0.79
0.020	16.31	-0.12	DEC01	96500	0.385	16.31	0.88
0.010	16.96	-0.07	DEC01	96625	0.500	16.96	0.93
0.005	17.52	-0.03	DEC01	96750	0.620	17.52	0.97
0	17.89	-0.01	DEC01	96875	0.740	17.89	0.99
0	17.89	0.00	DEC01	97000	0.865	17.89	1.00
0	17.83	0.00	DEC01	97125	0.990	17.83	1.00

Informação relativa ao dia 31 de Agosto de 2001

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
DEC01	Z	96.115

+++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
1.865	12.12	-1.00	DEC01	94250	0	12.12	0.00
1.740	12.12	-1.00	DEC01	94375	0	12.12	0.00
1.615	12.12	-1.00	DEC01	94500	0	12.12	0.00
1.490	12.12	-1.00	DEC01	94625	0	12.12	0.00
1.365	12.12	-1.00	DEC01	94750	0	12.12	0.00
1.240	12.12	-1.00	DEC01	94875	0	12.12	0.00
1.115	12.15	-1.00	DEC01	95000	0	12.15	0.00
0.990	12.19	-1.00	DEC01	95125	0	12.19	0.00
0.865	12.26	-1.00	DEC01	95250	0	12.26	0.00
0.740	12.44	-0.99	DEC01	95375	0	12.44	0.01
0.615	12.62	-0.98	DEC01	95500	0	12.62	0.02
0.495	12.91	-0.95	DEC01	95625	0.005	12.91	0.05
0.380	13.20	-0.89	DEC01	95750	0.015	13.20	0.11
0.275	13.53	-0.78	DEC01	95875	0.035	13.53	0.22
0.185	13.75	-0.64	DEC01	96000	0.070	13.75	0.36
0.115	14.01	-0.47	DEC01	96125	0.125	14.01	0.53
0.070	14.93	-0.32	DEC01	96250	0.205	14.93	0.68
0.040	15.63	-0.20	DEC01	96375	0.300	15.63	0.80
0.020	16.26	-0.11	DEC01	96500	0.405	16.26	0.89
0.010	16.91	-0.06	DEC01	96625	0.520	16.91	0.94
0.005	17.47	-0.03	DEC01	96750	0.640	17.47	0.97
0	17.84	-0.01	DEC01	96875	0.760	17.84	0.99

0	17.84	0.00	DEC01	97000	0.885	17.84	1.00
0	17.78	0.00	DEC01	97125	1.010	17.78	1.00
0	17.78	0.00	DEC01	97250	1.135	17.78	1.00
0	17.78	0.00	DEC01	97375	1.260	17.78	1.00
0	17.78	0.00	DEC01	97500	1.385	17.78	1.00

## Informação relativa ao dia 10 de Setembro de 2001

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
DEC01	Z	96.100

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
2.100	13.75	-1.00	DEC01	94000	0	13.75	0.00
1.975	13.75	-1.00	DEC01	94125	0	13.75	0.00
1.850	13.75	-1.00	DEC01	94250	0	13.75	0.00
1.725	13.75	-1.00	DEC01	94375	0	13.75	0.00
1.600	13.75	-1.00	DEC01	94500	0	13.75	0.00
1.475	13.75	-1.00	DEC01	94625	0	13.75	0.00
1.350	13.75	-1.00	DEC01	94750	0	13.75	0.00
1.225	13.75	-1.00	DEC01	94875	0	13.75	0.00
1.100	13.77	-1.00	DEC01	95000	0	13.77	0.00
0.975	13.81	-1.00	DEC01	95125	0	13.81	0.00
0.850	13.88	-1.00	DEC01	95250	0	13.88	0.00
0.725	13.87	-0.99	DEC01	95375	0	13.87	0.01
0.605	14.70	-0.97	DEC01	95500	0.005	14.70	0.03
0.485	14.76	-0.93	DEC01	95625	0.010	14.76	0.07
0.370	14.70	-0.86	DEC01	95750	0.020	14.70	0.14
0.265	14.58	-0.76	DEC01	95875	0.040	14.58	0.24
0.175	14.60	-0.62	DEC01	96000	0.075	14.60	0.38
0.110	15.06	-0.45	DEC01	96125	0.135	15.06	0.55
0.065	15.88	-0.30	DEC01	96250	0.215	15.88	0.70
0.040	16.93	-0.19	DEC01	96375	0.315	16.93	0.81
0.020	17.71	-0.11	DEC01	96500	0.420	17.71	0.89
0.010	18.36	-0.06	DEC01	96625	0.535	18.36	0.94
0.005	18.67	-0.03	DEC01	96750	0.655	18.67	0.97
0	18.89	-0.01	DEC01	96875	0.775	18.89	0.99
0	18.89	0.00	DEC01	97000	0.900	18.89	1.00
0	18.83	0.00	DEC01	97125	1.025	18.83	1.00
0	18.83	0.00	DEC01	97250	1.150	18.83	1.00
0	18.83	0.00	DEC01	97375	1.275	18.83	1.00
0	18.83	0.00	DEC01	97500	1.400	18.83	1.00

## Informação relativa ao dia 12 de Setembro de 2001

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
DEC01	Z	96.270

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
2.270	18.74	-1.00	DEC01	94000	0	18.74	0.00
2.145	18.74	-1.00	DEC01	94125	0	18.74	0.00
2.020	18.74	-1.00	DEC01	94250	0	18.74	0.00
1.895	18.74	-1.00	DEC01	94375	0	18.74	0.00

1.770	18.74	-1.00	DEC01	94500	0	18.74	0.00
1.645	18.74	-1.00	DEC01	94625	0	18.74	0.00
1.520	18.74	-1.00	DEC01	94750	0	18.74	0.00
1.395	18.74	-1.00	DEC01	94875	0	18.74	0.00
1.270	18.74	-1.00	DEC01	95000	0	18.74	0.00
1.145	18.89	-1.00	DEC01	95125	0	18.89	0.00
1.020	18.89	-0.99	DEC01	95250	0	18.89	0.01
0.895	19.04	-0.98	DEC01	95375	0	19.04	0.02
0.775	19.04	-0.97	DEC01	95500	0.005	19.04	0.03
0.655	19.04	-0.94	DEC01	95625	0.010	19.04	0.06
0.535	19.04	-0.90	DEC01	95750	0.015	19.04	0.10
0.425	19.32	-0.83	DEC01	95875	0.030	19.32	0.17
0.330	19.85	-0.74	DEC01	96000	0.060	19.85	0.26
0.245	20.55	-0.62	DEC01	96125	0.100	20.55	0.38
0.175	21.33	-0.50	DEC01	96250	0.155	21.33	0.50
0.120	21.98	-0.38	DEC01	96375	0.225	21.98	0.62
0.080	22.76	-0.27	DEC01	96500	0.310	22.76	0.73
0.050	23.41	-0.19	DEC01	96625	0.405	23.41	0.81
0.030	23.97	-0.12	DEC01	96750	0.510	23.97	0.88
0.015	24.34	-0.07	DEC01	96875	0.620	24.34	0.93
0.005	24.34	-0.04	DEC01	97000	0.735	24.34	0.96
0.005	24.28	-0.02	DEC01	97125	0.860	24.28	0.98
0	24.28	-0.01	DEC01	97250	0.980	24.28	0.99
0	24.28	0.00	DEC01	97375	1.105	24.28	1.00
0	24.28	0.00	DEC01	97500	1.230	24.28	1.00

## Informação relativa ao dia 17 de Setembro de 2001

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----	-----	-----
DEC01	Z	96.345

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1.845	19.84	-1.00	DEC01	94500	0	19.84	0.00
1.720	19.84	-1.00	DEC01	94625	0	19.84	0.00
1.595	19.84	-1.00	DEC01	94750	0	19.84	0.00
1.470	19.84	-1.00	DEC01	94875	0	19.84	0.00
1.345	19.84	-1.00	DEC01	95000	0	19.84	0.00
1.220	19.84	-1.00	DEC01	95125	0	19.84	0.00
1.095	19.84	-1.00	DEC01	95250	0	19.84	0.00
0.970	19.99	-0.99	DEC01	95375	0	19.99	0.01
0.850	19.99	-0.98	DEC01	95500	0.005	19.99	0.02
0.725	19.99	-0.96	DEC01	95625	0.005	19.99	0.04
0.605	20.04	-0.93	DEC01	95750	0.010	20.04	0.07
0.490	20.17	-0.87	DEC01	95875	0.020	20.17	0.13
0.385	20.50	-0.80	DEC01	96000	0.040	20.50	0.20
0.295	21.20	-0.69	DEC01	96125	0.075	21.20	0.31
0.215	22.03	-0.57	DEC01	96250	0.120	22.03	0.43
0.150	22.83	-0.45	DEC01	96375	0.180	22.83	0.55
0.100	23.56	-0.34	DEC01	96500	0.255	23.56	0.66
0.070	24.66	-0.24	DEC01	96625	0.350	24.66	0.76
0.045	25.67	-0.16	DEC01	96750	0.450	25.67	0.84
0.025	26.41	-0.11	DEC01	96875	0.555	26.41	0.89
0.015	26.95	-0.06	DEC01	97000	0.670	26.95	0.94
0.005	26.89	-0.03	DEC01	97125	0.785	26.89	0.97
0.005	26.89	-0.01	DEC01	97250	0.910	26.89	0.99
0	26.89	-0.01	DEC01	97375	1.030	26.89	0.99
0	26.89	0.00	DEC01	97500	1.155	26.89	1.00

## Informação relativa ao dia 18 de Setembro de 2001

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
DEC01	Z	96.505

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
2.005	19.39	-1.00	DEC01	94500	0	19.39	0.00
1.880	19.39	-1.00	DEC01	94625	0	19.39	0.00
1.755	19.39	-1.00	DEC01	94750	0	19.39	0.00
1.630	19.39	-1.00	DEC01	94875	0	19.39	0.00
1.505	19.39	-1.00	DEC01	95000	0	19.39	0.00
1.380	19.39	-1.00	DEC01	95125	0	19.39	0.00
1.255	19.39	-1.00	DEC01	95250	0	19.39	0.00
1.130	19.39	-1.00	DEC01	95375	0	19.39	0.00
1.005	19.39	-0.99	DEC01	95500	0	19.39	0.01
0.880	19.69	-0.99	DEC01	95625	0	19.69	0.01
0.760	19.69	-0.97	DEC01	95750	0.005	19.69	0.03
0.640	20.09	-0.95	DEC01	95875	0.010	20.09	0.05
0.520	20.16	-0.90	DEC01	96000	0.015	20.16	0.10
0.410	20.20	-0.83	DEC01	96125	0.030	20.20	0.17
0.305	20.20	-0.74	DEC01	96250	0.050	20.20	0.26
0.220	20.48	-0.62	DEC01	96375	0.090	20.48	0.38
0.155	21.56	-0.48	DEC01	96500	0.150	21.56	0.52
0.100	22.56	-0.36	DEC01	96625	0.220	22.56	0.64
0.065	23.60	-0.25	DEC01	96750	0.310	23.60	0.75
0.040	24.68	-0.17	DEC01	96875	0.410	24.68	0.83
0.025	25.39	-0.10	DEC01	97000	0.520	25.39	0.90
0.010	25.59	-0.06	DEC01	97125	0.630	25.59	0.94
0.005	25.59	-0.03	DEC01	97250	0.750	25.59	0.97
0	25.59	-0.01	DEC01	97375	0.870	25.59	0.99
0	25.59	0.00	DEC01	97500	0.995	25.59	1.00
0	25.57	0.00	DEC01	97625	1.120	25.57	1.00
0	25.52	0.00	DEC01	97750	1.245	25.52	1.00
0	25.52	0.00	DEC01	97875	1.370	25.52	1.00
0	25.52	0.00	DEC01	98000	1.495	25.52	1.00

## Informação relativa ao dia 21 de Setembro de 2001

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Futuros) +++

Expiry	Delivery	Settlement
Date	Month	Price
-----		
DEC01	Z	96.595

### +++ THREE MONTH EURO (EURIBOR) (Opções) +++

CALLS					PUTS		
Settlement	Volatility	Delta	Expiry	Strike	Settlement	Volatility	Delta
-----							
2.095	22.29	-1.00	DEC01	94500	0	22.29	0.00
1.970	22.29	-1.00	DEC01	94625	0	22.29	0.00
1.845	22.14	-1.00	DEC01	94750	0	22.14	0.00
1.720	22.14	-1.00	DEC01	94875	0	22.14	0.00
1.595	22.14	-1.00	DEC01	95000	0	22.14	0.00
1.470	22.14	-1.00	DEC01	95125	0	22.14	0.00
1.345	22.14	-1.00	DEC01	95250	0	22.14	0.00
1.220	22.14	-1.00	DEC01	95375	0	22.14	0.00
1.095	22.14	-0.99	DEC01	95500	0	22.14	0.01
0.970	22.08	-0.99	DEC01	95625	0	22.08	0.01

0.850	22.13	-0.98	DEC01	95750	0.005	22.13	0.02
0.725	22.29	-0.96	DEC01	95875	0.005	22.29	0.04
0.610	22.45	-0.92	DEC01	96000	0.015	22.45	0.08
0.495	22.45	-0.87	DEC01	96125	0.025	22.45	0.13
0.385	22.41	-0.79	DEC01	96250	0.040	22.41	0.21
0.290	22.69	-0.69	DEC01	96375	0.070	22.69	0.31
0.210	23.12	-0.57	DEC01	96500	0.115	23.12	0.43
0.145	24.17	-0.45	DEC01	96625	0.175	24.17	0.55
0.095	24.86	-0.33	DEC01	96750	0.250	24.86	0.67
0.060	25.94	-0.23	DEC01	96875	0.340	25.94	0.77
0.040	26.85	-0.15	DEC01	97000	0.445	26.85	0.85
0.020	26.84	-0.09	DEC01	97125	0.550	26.84	0.91
0.010	26.84	-0.05	DEC01	97250	0.665	26.84	0.95
0.005	26.84	-0.02	DEC01	97375	0.785	26.84	0.98
0	26.84	-0.01	DEC01	97500	0.905	26.84	0.99
0	26.83	0.00	DEC01	97625	1.030	26.83	1.00
0	26.78	0.00	DEC01	97750	1.155	26.78	1.00
0	26.78	0.00	DEC01	97875	1.280	26.78	1.00
0	26.78	0.00	DEC01	98000	1.405	26.78	1.00